X ENS Maths A

q Autour des forme quadratiques non dégénérées $\tilde{q}$

Corrigé

Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries :

1. $q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$ et pour tous $x,y\in\mathbb{K}^n$ on a $\tilde{q}(x,y)=a_1x_1y_1+\ldots+a_nx_ny_n$, donc $\tilde{q}$ est une forme bilinéaire symétrique, c'est-à-dire q est une forme quadratique.

2. Si q et q' sont deux formes quadratiques sur V telles que $\tilde{q}=\tilde{q}'$, alors pour tout $x\in V$, $q(x)=\tilde{q}(x,x)=\tilde{q}'(x,x)=q'(x)$, et donc $q=q'$.
Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur V, pour $x\in V$ posons $q(x)=\varphi(x,x)$, alors q est une forme quadratique et $\tilde{q}=\varphi$.

3. $\mathcal{B}$ une base de V.

   3.1 Pour $x,y\in V$, notons X la matrice des cordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et Y celle de y, on rappelle que $b(x,y)={}^tX\Phi_{\mathcal{B}}(b)Y$. Notons $M=\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$
   Par contraposée :
   Supposons q dégénérée : Il existe $x\in V$ non nul tel que, pour tout $y\in V$; $\tilde{q}(y,x)=0$, donc pour toute matrice colonne Y ; ${}^tYMX=0$, ce qui implique $MX=0$ ($X\neq 0$), ainsi la matrice M n'est pas inversible et $\det M=0$.
   Supposons $\det M=0$: alors il existe une matrice colonne non nul X tel que $MX=0$, pour tout matrice colonne Y, on a ${}^tYMX=0$, il vient alors que pour tout $y\in V$; $\tilde{q}(y,x)=0$, donc $\tilde{q}$ est dégénérée.

   3.2 $\Phi_{\mathcal{B}_c}(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle)=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)=$ la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont $a_1,\ldots,a_n$.
   $\det(\Phi_{\mathcal{B}_c}(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle))=\prod_{i=1}^n a_i\neq 0$, donc $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in\mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.

4. Soit $q\in\mathcal{Q}(V)$ une forme quadratique non dégénérée sur V.

   4.1 Soit $f:V\to V'$ une isométrie entre q et q' ($q'\circ f=q$). pour tous $x,y\in V$; $\tilde{q}'(f(x),f(y))=\tilde{q}(x,y)$.
   Soit $x'\in V'$ un vecteur non nul et $x\in V$ tel que $x'=f(x)$, puisque f est isomorphisme alors x est aussi non nul, il existe alors (q non dégénérée) $w\in V$ tel que $\tilde{q}(x,w)\neq 0$, soit $w'=f(w)\neq 0$ et on a $\tilde{q}'(x',w')=\tilde{q}'(f(x),f(w))=\tilde{q}(x,w)\neq 0$.

   4.2 Soit $x\neq 0$, l'application $\ell:V\to\mathbb{K}$ définie pour tout $y\in V$ par $\ell(y)=\tilde{q}(x,y)$ est une forme linéaire, comme q est non dégénérée, il existe $w\in V$ tel que $\ell(w)=\tilde{q}(x,w)\neq 0$, donc ℓ est une forme linéaire non nulle dont le noyau est $\{x\}^\perp$ qui est alors un hyperplan de V.

   4.3 Soit $x\neq 0$, les deux sous espaces vectoriels $\{x\}^\perp$ et $\mathbb{K}x$ sont supplémentaires si, et seulement si, $x\notin\{x\}^\perp$ si, et seulement si, $q(x)=\tilde{q}(x,x)\neq 0$.

5. Il est clair que $\mathrm{Id}_V\in O(q)$ et que $O(q)$ est une partie de $GL(V)$.
Considérons deux éléments $f,g\in O(q)$, on a $q\circ f\circ g=q\circ g=q$ donc $f\circ g\in O(q)$, et

$q \circ f^{-1} = q \circ f \circ f^{-1} = q$ donc $f^{-1} \in O(q)$.
Soit $f : V \to V'$ une isométrie entre q et q' ($q' \circ f = q$) , remarquons que si $g \in O(q)$ alors $f \circ g \circ f^{-1} \in O(q')$, ceci permet de définir une application φ de $O(q)$ dans $O(q')$, en posant pour tout $g \in O(q)$, $\varphi(g) = f \circ g$ qui est bien un isomorphisme de groupes.

Première partie :
Existence des bases orthogonales

6. isotrope anisotrope.

6.1 Si pour tout $x \in V$, $q(x) = 0$, alors pour tous $x, y \in V$, $\tilde{q}(x, y) = 0$, c'est-à-dire $\tilde{q} = 0$ dégénérée.

6.2 $\dim V = 2$ et q isotrope.
Notons e un vecteur non nul de V tel que $q(e) = 0$, il existe $w \in V$ tel que $\tilde{q}(e, w) \neq 0$, et notons en fin $e' = \dfrac{1}{\tilde{q}(e, w)} w - \dfrac{q(w)}{2\tilde{q}(w, e)^2} e$.
$\tilde{q}(e, e') = 1$ (en particulier la famille (e, e') est libre, donc base de V) , et $q(e) = q(e') = 0$.
Considérons maintenant l'application $f : \mathbb{K}^2 \to V$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ par $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 e + x_2 e'$, f est un isomorphisme et $q \circ f = h$.

6.3 Remarque : En dimension 1, il n'existe pas de forme quadratique qui est à la fois isotrope et non dégénérée.
Montrons la propriété si $\dim V = 2$:
Soit q une forme quadratique non dégénérée et isotrope de V, d'après le résultat de la question précédente, q est isométrique à la forme quadratique h définie à la question précédente, et il suffit alors de démontrer que h est surjective : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $h(1, \lambda) = \lambda$.
Maintenant, considérons un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et q une forme quadratique non dégénérée et isotrope de V, avec le même raisonnement de la question précédente, ils existent deux vecteur $e, e' \in V$ tel que $q(e) = q(e') = 0$ et $\tilde{q}(e, e') = 1$ (on aussi la famille (e, e') est libre), soit V' le sous espace vectoriel engendré par e et e', et $q' = q/V'$ la restriction de q à V', pour terminer : q' est isométrique à h donc surjective, par la suite q est aussi surjective .

7. 7.1 Par récurrence sur la dimension de V :
La propriété est vérifié en dimension 1.
Supposons la propriété est vérifiée en dimension $n - 1 \geq 1$, et soit V un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non dégénérée sur V. Il existe $e_1 \in V$ tel que $q(e_1) \neq 0$, notons $V' = \{e_1\}^{\perp}$ et $q' = q/V'$; d'après la question 4c, $V = V' \oplus \mathbb{K}e_1$ et $\dim V' = n - 1$.
q' non dégénérée : en effet si $x \in V'$ il existe $w \in V$ tel que $\tilde{q}(x, w) \neq 0$, soient $w' \in V$ et $\lambda \in K$ tels que $w = w' + \lambda e_1$; on a $\tilde{q'}(x, w') = \tilde{q}(x, w) \neq 0$.
Elle existe alors une base $(e_2, \ldots, e_n)$ orthogonale pour q', maintenant la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ convienne.

7.2 D'après la question précédente, elle existe une base de V orthogonale pour q. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, f est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans V et $q(f(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2$ où $a_k = q(e_k)$ pour $1 \leq k \leq n$. Les deux formes quadratiques

q et $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ sont isométriques et q non dégénérée donc $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ est aussi non dégénérée, il vient alors que $a_1,\dots,a_n$ sont non nuls.

Deuxième partie :
Étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

8. $q\in\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.
Ils existent $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tels que q soit isométrique à $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$, il suffit alors de démonter le résultat pour cette dernière forme quadratique : on pose $r=\#\{i\ ,\ a_i>0\}$ et $s=\#\{i\ ,\ a_i<0\}$ on a $r+s=n$, quitte a effectuer une permutation sur les coordonnées (elle correspond à un isomorphisme), on peut supposer que $\{i\ ,\ a_i>0\}=\{a_1,\dots,a_r\}$, donc
$\langle a_1,\dots,a_n\rangle(x)=\sum\limits_{k=1}^{r}(\sqrt{a_k}a_k)^2-\sum\limits_{k=r+1}^{n}(\sqrt{-a_k}x)^2$, ce qui montrer que la forme quadratique $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ est isométrique à $Q_{r,s}$ via l'isométrie

$$x=(x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n)\longmapsto(\sqrt{a_1}x_1,\dots,\sqrt{a_r}x_r),\sqrt{-a_{r+1}}x_{r+1},\dots,\sqrt{-a_n}x_n$$

.

9. La matrice de la forme quadratique $Q_{r,s}$ dans la base canonique est la matrice $I_{r,s}$.
$M\in O_{r,s}$ si, et seulement si, $f\in O(Q_{r,s})$ si, et seulement si, $Q_{r,s}\circ f=Q_{r,s}$ si, et seulement si, ${}^tMI_{r,s}M=I_{r,s}$.
Si $M\in O_{r,s}$; $\det({}^tMI_{r,s}M)=\det I_{r,s}$ et donc $(\det M)^2=1$, d'où $\det M=\pm1$.

10. $O_{r,s}$ sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ puisque $O(Q_{r,s})$ est un sous groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$.
$O_{r,s}=GL_n(\mathbb{R})\cap H^{-1}(0)$ où H est l'application définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même par ; $H(M)={}^tMI_{r,s}M-I_{r,s}$. H étant continue , donc $H^{-1}(0)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $O_{r,s}$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ (intersection de $GL_n(\mathbb{R})$ et d'un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

11. $K_{r,s}=O(n)\cap\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ {}^tMI_{r,s}M=I_{r,s}\}$, donc $K_{r,s}$ est un fermé de $O(n)$, et puisque $O(n)$ est compact il vient que $K_{r,s}$ est aussi compact.
Pour $(M,N)\in O(r)\times O(s)$, notons $D(M,N)$ la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(M,N)\in O(r)\times O(s)$, on a

$$\begin{aligned}{}^tD(M,N)I_{r,s}D(M,N)&={}^tD(M,N)D(I_r,-I_s)D(M,N)\\&=D({}^tMI_rM,-{}^tNI_sN)\\&=D(I_r,-I_s)\\&=I_{r,s}\end{aligned}$$

D'autre par, ${}^tD(M,N)D(M,N)=D({}^tMM,{}^tNN)=I_n$, ceci qui montrer que $D(M,N)\in K_{r,s}$.
Montrons que D est une bijection de $O(r)\times O(s)$ sur $K_{r,s}$.
L'injectivité ne demande pas de justification.
Soit $M'\in K_{r,s}$, d'une part $M'\in O(n)$ donne $M'^{-1}={}^tM'$ et d'autre par ${}^tM'I_{r,s}M'=I_{r,s}$, il en résulte que $I_{r,s}M'=M'I_{r,s}$, posons $M'=\begin{pmatrix}M&A\\B&N\end{pmatrix}$ avec $M\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $A\in\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ et $N\in\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, en effectuant le produit par blocs dans l'égalité précédente ,

on obtient $-A = A$ et $-B = B$ c'est-à-dire les deux matrices A et B sont nulles. Comme ${}^tM'M' = I_n$ alors (produit par blocs) ${}^tMM = I_r$ et ${}^tNN = I_s$, ainsi $(M, N) \in O(r) \times O(s)$ et $M' = D(M, N)$. Ceci prouve la surjectivité de D.

12. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Soient $A, B \in SO_2(\mathbb{R})$ (matrices de rotations), ils existent $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $A = M(\theta)$ et $B = M(\theta')$, pour $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = M((1-t)\theta + t\theta')$. Pour tout $t \in [0, 1]$; $\gamma(t) \in SO_2(\mathbb{R})$, donc $\gamma : [0, 1] \to SO_2$ est une chemin continue et vérifiant $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. On en déduit que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

13.

13.1 Soit $f \in O(\mathcal{Q}_{2,1})$.
Soit $(x, y, z) \in H$ et $(x', y', z') = f(x, y, z)$, on a $x'^2 + y'^2 - z'^2 + 1 = Q_{2,1}(f(x, y, z)) + 1 = Q_{2,1}(x, y, z) + 1 = 0$, donc $f(x, y, z) = (x', y', z') \in H$, d'où $f(H) \subset H$.
Réciproquement, si $(x, y, z) \in H$, comme f isomorphisme il existe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = f(x', y', z')$; et on a
$0 = x'^2 + y'^2 - z'^2 + 1 = Q_{2,1}(f(x, y, z)) + 1 = Q_{2,1}(x, y, z) + 1 = x^2 + y^2 - z^2 + 1$, donc $(x, y, z) \in H$, d'où $H \subset f(H)$.

13.2 $SO_{2,1}$ est l'intersection des deux groupes $O_{2,1}$ et $\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \ , \ \det M = 1\}$ donc sous groupe de $O_{2,1}$, et comme le deuxième groupe est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (det est continue), il vient que $SO_{2,1}$ est un fermé de $O_{2,1}$.

14.

14.1 Notons R_t la matrice de r_t dans la base canonique de $\mathbb{R}$; des calculs montre que ${}^tR_tI_{2,1}R_t = I_{2,1}$, $\det R_t = 1$ et $z_{r_t} = \operatorname{ch} t > 0$, donc $r_t \in SO^+_{2,1}$.

14.2 Soit $M = j(f)$, On suppose que $M \in SO^+_{2,1}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\rho(\theta)$ la rotation d'angle θ d'axe $(0, 0, 1)$, dont la matrice dans la base canonique est $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour $\theta, t \in \mathbb{R}$; on a $R_tP(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \operatorname{ch} t \sin\theta & \operatorname{ch} t \cos\theta & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t \sin\theta & \operatorname{sh} t \cos\theta & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ On cherche des valeurs de t et θ pour lesquelles $r_t \circ \rho(\theta) \circ f(0, 0, 1) = r_t \circ \rho(\theta)(x_f, y_f, z_f) = (0, 0, 1)$, ce qui revient à résoudre le système suivante en θ et t (on montre qu'il possède au moins une solution) :

$$\begin{cases} x_f \cos\theta - y_f \sin\theta & = & 0 \\ x_f \operatorname{ch} t \sin\theta + y_f \operatorname{ch} t \cos\theta + z_f \operatorname{sh} t & = & 0 \\ x_f \operatorname{sh} t \sin\theta + y_f \operatorname{sh} t \cos\theta + z_f \operatorname{ch} t & = & 1 \end{cases}$$

<u>Premier cas :</u> $y_f = 0$.
La première équation s'écrit $x_f \cos\theta = 0$, elle est vérifiée au moins pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Or $(x_f, y_f, z_f) \in H$, alors $z_f^2 - x_f^2 = 1$ et puisque $z_f > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_f = \operatorname{sh}\alpha$ et $z_f = \operatorname{ch}\alpha$; en réécrivant les deux dernières équations :

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch} t + \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh} t & = & \operatorname{sh}(\alpha + t) & = & 0 \\ \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh} t + \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(t) & = & \operatorname{ch}(\alpha + t) & = & 1 \end{array}$$

$t = -\alpha$ convient.
<u>Deuxième cas</u> : $y_f \neq 0$.

Pour $\theta' \in \mathbb{R}$, on a $\rho(\theta')(x_f, y_f, z_f) = (x_f \cos\theta' - y_f \sin\theta', x_f \sin\theta' + y_f \cos\theta', z_f) = (x_g, y_g, z_g)$ où $g = \rho(\theta') \circ f \in SO_{2,1}^+$. Il existe (justification immédiate) $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $y_g = 0$; d'après ce qui précède ils existent t et θ'' tels que $r_t \circ \rho(\theta'') \circ g(0,0,1) = (0,0,1)$, mais $r_t \circ \rho(\theta'') \circ g = r_t \circ \rho(\theta'' + \theta') \circ f$, dans ce cas t et $\theta = \theta'' + \theta'$ répondent à la question.

Remarques : pour tous $t, \theta \in \mathbb{R}$, $R_t^{-1} = R_{-t}$ et $P(\theta)^{-1} = P(-\theta)$, et les matrices $R_t, P(\theta), R_t P(\theta), P(\theta) R_t \in SO_{2,1}^+$.

14.3 Soit $M = j(f) \in SO_{2,1}^+$, ils existent t et θ tels que $r_t \circ \rho(\theta) \circ f(0,0,1) = (0,0,1)$, posons $g = r_t \circ \rho(\theta) \circ f$ et $N = j(g) \in SO_{2,1}^+$. N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$, de l'égalité ${}^t N I_{2,1} N = I_{2,1}$ et le fait que $\det N = 1$ on trouve $e = f = 0$ et que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2$, on en déduit l'existence de $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $N = P(\theta')$, considérons l'application $\gamma : [0,1] \to SO_{2,1}^+$ définie pour tout $s \in [0,1]$ par $\gamma(s) = P(-s\theta) R_{-st} P(s\theta') \in SO_{2,1}^+$, γ est un chemin continue et relie M avec I_3, $\gamma(0) = I_3$ et $\gamma(1) = M$, notons que R_{-t} est l'inverse de R_t et $P(-\theta)$ celui de $P(\theta)$.

D'où la connexité par arcs de $SO_{2,1}^+$.

Remarque : $M' \in SO_{2,1}^+$, on a montrer l'existence d'un chemin qui relie M et I_3 et de même on un chemin qui relie M' et I_3, par la suite un chemin qui relie M et M'.

15. Posons :
$E_1 = SO_{2,1}^+$,
$E_2 = \{M = j(f) \in SO_{2,1}^+ \ / \ z_f < 0\}$,
$E_3 = \{M = j(f) \in O_{2,1} \ / \det M = -1 \text{ et } z_f > 0\}$ et
$E_4 = \{M = j(f) \in O_{2,1} \ / \ \det M = -1 \text{ et } z_f < 0\}$.
Pour $M = j(f) \in O_{2,1}$, on a $\det M = \pm 1$ et $z_f^2 = x_f^2 + y_f^2 + 1$, donc $\det M = \pm 1$ et $z_f \neq 0$, ceci montrer que $O_{2,1}$ est la réunion des quatre sous ensembles E_i ; $i = 1, \ldots, 4$ deux à deux disjointes.

Notons D la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $D \in E_3$, les applications suivantes sont des homéomorphismes :

- $E_1 \to E_2$, $M \mapsto MDI_{2,1}$,
- $E_1 \to E_3$, $M \mapsto MD$ et
- $E_1 \to E_4$, $M \mapsto MI_{2,1}$.

Il vient alors que ces quatre sous ensembles sont connexes par arcs.

Remarque : on multiplie par D pour changer le signe du déterminant, et par $I_{2,1}$ pour changer celui de z_f.

Pour le reste il suffit de montrer que E_1 est fermé, soit $(M_n = j(f_n))_n$ une suite d'éléments de E_1 convergente de limite $M = j(f) \in O_{2,1}$, par continuité de l'application $\det$ on a $\det M = \lim\limits_{n \to +\infty} \det M_n = 1$; d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $z_{f_n} > 0$ alors $z_f \geq 0$, mais $z_f^2 = x_f^2 + y_f^2 + 1 \neq 0$, on en déduit alors que $z_f > 0$ et $M \in SO_{2,1}^+$.

16. Soit φ de $O_{2,1}$ dans le groupe multiplicatif $G = \{I_3, D, I_{2,1}, DI_{2,1}\}$ définie par :

$$\varphi(M) = \begin{cases} I_3 & \text{si} \quad x \in E_1 \\ I_{2,1} & \text{si} \quad x \in E_2 \\ D & \text{si} \quad x \in E_3 \\ DI_{2,1} & \text{si} \quad x \in E_4 \end{cases}$$

φ est morphisme de groupes surjectif et $\ker \varphi = SO^+_{2,1}$, on obtient le résultat en remarquant que les deux groupes G et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Remarques :

• La table de G :

$\times$	$P_1 = I_3$	$P_2 = I_{2,1}$	$P_3 = D$	$P_4 = DI_{2,1}$
$P_1 = I_3$	P_1	P_2	P_3	P_4
$P_2 = I_{2,1}$	P_2	P_1	P_4	P_3
$P_3 = D$	P_3	P_4	P_1	P_2
$P_4 = DI_{2,1}$	P_4	P_3	P_2	P_1

• Une table utile pour φ :

$M \times N$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	E_1	E_4	E_3
E_3	E_3	E_4	E_1	E_2
E_4	E_4	E_3	E_2	E_1

• Notons $E_{i,j}$ l'élément de la dernière table, situé sur ligne i et la colonne j (on ne compte pas la première ligne et la première colonne),de même notons $P_{i,j}$ celui de la première table.
$M \in E_i$ et $N \in E_j$ alors $MN \in E_{i,j}$, donc $\varphi(MN) = P_{i,j} = P_iP_j = \varphi(M)\varphi(N)$.

Troisième Partie :
Somme orthogonale

$\boxed{17.}$ $(q, q', q'') \in \mathcal{Q}(V) \times \mathcal{Q}(V') \times \mathcal{Q}(V'')$

$\boxed{17.1}$ Notons que pour tous $(x, x'), (y, y') \in V \times V'$, on a $\widetilde{q \perp q'}((x, x'), (y, y')) = \tilde{q}(x, y) + \tilde{q}'(x', y')$.
Si (x, y) est un élément non nul de $V \times V'$ ($x \neq 0$ ou $y \neq 0$), si $x \neq 0$, il existe $w \in V$ tel que $q(x, w) \neq 0$ dans ce cas $\widetilde{q \perp q'}((x, y), (w, 0)) = \tilde{q}(x, w) \neq 0$. Dans le cas contraire $y \neq 0$, et il existe $w' \in V'$ tel que $\tilde{q}'(y, w') \neq 0$, et dans ce cas le vecteur $(0, w')$ convient.
L'application $(V \times V') \times V'' \to V \times (V' \times V'')$ définie par $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$ est une isométries entre les deux formes quadratiques $(q \perp q') \perp q''$ et $q \perp (q' \perp q'')$.

$\boxed{17.2}$ Soit f un isométrie entre q' et q'' l'application h définie par $h(x, y) = (x, f(y))$ pour tout $(x, y) \in V \times V'$ est une isométrie entre $q \perp q'$ et $q \perp q''$.

$\boxed{17.3}$ Soit $f : V' \times V'' \to V$ définie pour tout $(x', x'') \in V' \times V''$ par $f(x', x'') = x' + x''$; puisque V' et V'' sont supplémentaires dans V, alors f est un isomorphisme : et pour tout $(x', x'') \in V' \times V''$ on a

$$\begin{array}{rcl} q \circ f(x', x'') & = & q(x' + x'') \\ & = & q(x') + 2\tilde{q}(x', x'') + q(x'') \\ & = & q(x') + q(x'') \\ & = & q'(x') + q''(x'') \\ & = & q' \perp q''(x', x'') \end{array}$$

d'où le résultat.

18. $q(v) = q(w) \neq 0$.

18.1 soit $y \in V$;

$q(s_x(y)) = q(y) - 4\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\tilde{q}(x,y) + 4\left(\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\right)^2 q(x) = q(y)$,et

$q(-s_x(y)) = q(s_x(y)) = y$.

Si $s_x(y) = 0$, alors $y = \lambda x$ avec $\lambda = 2\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}$, donc $0 = q(s_x(y)) = q(y) = \lambda^2 q(x)$, ce qui montre que $y = 0$, s_x et $-s_x$ sont des isomorphismes.

On en déduit alors que s_x et $-s_x \in O(q)$.

18.2 $q(w - v) \neq 0$, alors s_{w-v} est une isométrie .

$s_{w-v}(v) = v - 2\dfrac{\tilde{q}(v - w, v)}{q(v - w)}(v - w)$, et

$$\begin{array}{rcl} q(v - w) & = & \tilde{q}(v - w, v) + \tilde{q}(v, w) - \tilde{q}(w, w) \\ & = & \tilde{q}(v - w, v) + \tilde{q}(v, w) - q(v, v) \\ & = & \tilde{q}(w - v, v) + \tilde{q}(v, w - v) \\ & = & 2\tilde{q}(v - w, v) \end{array}$$

donc $s_{w-v}(v) = v - (v - w) = w$.

18.3 $q(w - v) = 0$.

On a

$$\begin{array}{rcl} q(v + w) & = & q(v + w) + q(w - v) \\ & = & q(v) + 2\tilde{q}(v, w) + q(w) + q(w) - 2\tilde{q}(v, w) + q(w) \\ & = & 4q(v) \neq 0 \end{array}$$

donc $g = -s_{v+w}$ est une isométrie et $g(v) = s_{w-(-v)}(-v) = w$.

Conclusion : si $q(w - v) \neq 0$; $g = s_{w-v}$ convient.

Si $q(w - v) = 0$; $g = -s_{v+w}$ convient, d'où le résultat.

19. Par récurrence sur la dimension de V_3.

Démontrons le résultat dans le cas $\dim V_3 = 1$:

Soit q_1' la forme quadratique définie sur $V_1 \oplus V_3$ par $q_1'(x + y) = q_1(x) + q_3(y)$ pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_3$; la forme quadratique q_1' vérifie : pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_3$, $\tilde{q_1'}(x, y) = 0$, $q_1'/V_1 = q_1$ et $q_1'/V_3 = q_3$, d'après la question 17. $q_1' \cong q_1 \perp q_3$, on définie de même la forme quadratique q_2' sur $V_2 \oplus V_3$ par $q_2'(x + y) = q_2(x) + q_3(y)$ pour tout $(x, y) \in V_2 \times V_3$; et on a aussi $q_2' \cong q_2 \perp q_3$, les deux formes quadratiques q_1' et q_2' sont isométriques.

Soit $e \in V_3$ un générateur de V_3, et $f : V_1 \oplus V_3 \to V_2 \oplus V_3$ une isométrie, on a $q_2'(f(e)) = q_1'(e) = q_3(e) = q_2'(e)$ et comme q_3 est non dégénérée et $\dim V_3 = 1$ alors $q_3(e) \neq 0$. il vient

alors que $q_2'(f(e)) = q_2'(e) \neq 0$, d'après la question 18. elle existe une isométrie $g \in O(q_2')$ telle que $g(f(e)) = e$; on en déduit que $f' = g \circ f$ est une isométrie entre q_1' et q_2' avec $f'(e) = e$.
Soit $x \in V_1$, on a $\tilde{q_2'}(f'(x), e) = \tilde{q_2'}(f'(x), f'(e)) = \tilde{q_1'}(x, e) = 0$, donc $f'(x) \in \{e\}^{\perp q_2'}$, d'autre part $V_2 \subset \{e\}^{\perp q_2'}$ et comme V_2 et $\{e\}^{\perp q_2'}$ sont des hyperplans de $V_2 \oplus V_3$ alors $V_2 = \{e\}^{\perp q_2'}$, et donc $f'(x) \in V_2$. Comme V_1 et V_2 ont même dimension et f' envoie V_1 sur V_2, alors l'application $f_2 = V_2 : V_1 \to V_2$ définie par $f_2(x) = f'(x)$ pour tout $x \in V_2$ est un isomorphisme, de plus ; pour tout $x \in V_1$; $q_2(f_2(x)) = q_2'(f'(x)) = q_1'(x) = q_1(x)$. f_2 est une isométrie entre q_1 et q_2.
Supposons la propriété est vérifié en dimension $n-1 \geq 1$, et on suppose que $\dim V_3 = n$, ils existent $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tels que $q_3 \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. On a $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong q_{n-1} \perp \langle a_n \rangle$ où q_{n-1} est la forme quadratique $\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$(forme quadratique sur $\mathbb{K}^{n-1}$) .
$q_1 \perp q_3 \cong q_1 \perp (q_{n-1} \perp \langle a_n \rangle) \cong (q_1 \perp q_{n-1}) \perp \langle a_n \rangle$, de même $q_2 \perp q_3 \cong (q_2 \perp q_{n-1}) \perp \langle a_n \rangle$, on obtient $(q_1 \perp q_{n-1}) \perp \langle a_n \rangle \cong (q_2 \perp q_{n-1}) \perp \langle a_n \rangle$, en appliquant ce qui précède à la forme quadratique non dégénérée $\langle a_n \rangle$ (forme quadratique sur $\mathbb{K}$) ; on obtient $q_1 \perp q_{n-1} \cong q_2 \perp q_{n-1}$ et maintenant l'hypothèse de récurrence permet de conclure : $q_1 \cong q_2$.

20. Existence :
Par récurrence sur $\dim V$:
Si $\dim V = 1$ et $q \in \mathcal{Q}(V)$ alors q est anisotrope, et dans ce cas $q \cong q \perp 0.h$.
Supposons le résultat est vérifié pour tout espace vectoriel de dimension $\leq n$, et soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$ et $q \in \mathcal{Q}(V)$. Si q est anisotrope alors $q \cong q \perp 0.h$ sinon soit $e \in V$ non nul tel que $q(e) = 0$, et $v \in V$ tel $\tilde{q}(e, v) \neq 0$, la famille (e, v) est libre, notons $V_1 = \text{Vect}(e, v)$ le sous espace vectoriel engendré par u et v, $q_1 = q/V_1$, q_1 est une forme quadratique non dégénérée isotrope, en effet ; $q_1(e) = 0$ et si $x = \alpha e + \beta v \in V_1$ non nul , alors $\tilde{q}_1(x, e) = \beta \tilde{q}(v, e) \neq 0$ si $\alpha = 0$ $(\alpha \neq 0)$; et $\tilde{q}_1(x, v) = \alpha \tilde{q}(e, v) \neq 0$ si $\beta = 0$ $(\alpha \neq 0)$. Puisque $\dim V_1 = 2$ alors $q_1 \cong h$.
Soit $V_2 = V_1^{\perp} = \{x \in V \ / \ \tilde{q}(x, e) = \tilde{q}(x, v) = 0\}$, et on a $V = V_1 \oplus V_2$; en effet : V_2 est l'intersection des deux hyperplan $\{e\}^{\perp}$ et $\{v\}^{\perp}$ aucun d'entre eux ne contenant l'autre, donc $\dim V_2 = n-2$, si $x \in V_1 \cap V_2$, alors d'une part $x = \alpha e + \beta v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; d'autre part $0 = \tilde{q}(x, e) = \beta \tilde{q}(v, e)$ donne $\beta = 0$ et $0 = \tilde{q}(x, v) = \alpha \tilde{q}(e, v)$ donne aussi $\alpha = 0$, ce qui affirme le résultat.
Notons $q_2 = q/V_2$; c'est une forme quadratique non dégénérée : si $x \in V_2$ non nul , il existe $w = w_1 + w_2 \in V$ avec $w_i \in V_i$ tel que $\tilde{q}(x, w) \neq 0$; par raison d'orthogonalité on a $\tilde{q}_2(x, w_2) = \tilde{q}(x, w_2) = \tilde{q}(x, w) \neq 0$.
Pour $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ on a $\tilde{q}(x_1, x_2) = 0$, d'après la question 17.c on a $q \cong q_2 \perp q_1 \cong q_2 \perp h$, comme $\dim V_2 = n-2 \leq n$ et $q_2 \in \mathcal{Q}(V_2)$, par hypothèse de récurrence ; il existe un entier m et une forme quadratique anisotrope q_{an} tels que $q_2 \cong q_{an} \perp m.h$, c'est bien alors que $q \cong q_{an} \perp (m+1).h$.
Unicité : Supposons que l'on a deux décomposition de q ; $q \cong q_{an} \perp m.h \cong q_{an}' \perp m'.h$, avec les même notations. Supposons en plus que $m \geq m'$; d'après le résultat de simplification de la question 19. (appliqué m'-fois), on obtient $q_{an} \perp (m-m')h = q_{an}'$ par raison d'isotropie de h et q_{an}' anisotrope alors $m - m' = 0$ (sinon, il existe un élément non nul e dans $\mathbb{K}^2$ tel que $h(e) = 0$, et donc $x = (e, \ldots, e) \in (\mathbb{K}^2)^{m-m'}$ qu'est non nul , vérifie $(m-m').h(x) = 0$ et sont image x' par l'isométrie "réalisant l'isométrie entre ses de formes quadratique" vérifie $x' \neq 0$ et $\tilde{q_{an}'}(x') = 0$ ce qui est impossible.), c'est bien maintenant que $m = m'$ et $q_{an} \cong q_{an}'$.

FIN