

CONCOURS

SESSION 1993

COMMUNS

EPREUVE COMMUNE AU CONCOURS  
PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

POLYTECHNIQUES

Durée 3 h

L'utilisation des calculatrices est autorisée dans le cadre des dispositions de la circulaire 86228 du 28-07-1986.

Notations : Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on note :

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ ,

$Id_n$  l'application identité sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$O_n$  l'application nulle sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,

$I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

et  $O_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Une matrice  $A$ , élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  étant donnée, on désignera par  $C_j$  sa colonne d'indice  $j$ , par  $L_i$  sa ligne d'indice  $i$  et par  $A[i, j]$  ou  $a_{i,j}$  l'élément de  $A$  situé dans  $L_i$  et dans  $C_j$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ).

**Définition 1 :** On appelle matrice compagnon d'ordre  $n$  une matrice carrée de la forme suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si  $n = 1$ ,  $C = (-c_0)$ .

On dira que le polynôme  $P$  appartenant à  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$  est le polynôme associé à la matrice  $C$ .

**Définition 2 :** On rappelle que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont dites semblables (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) si et seulement si il existe une matrice  $P$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que  $P^{-1}AP = B$ .

**Objectif :** Dans ce problème, on se propose de montrer que toute matrice  $A$ , élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , est semblable à une matrice  $F$  diagonale par blocs,  $F = \text{diag}(C_1, \dots, C_k)$ , où les blocs diagonaux  $C_j$  sont des matrices compagnons. De plus on définit un certain nombre de procédures permettant de construire effectivement cette matrice  $F$ , appelée forme faible de Frobenius de la matrice  $A$ .

**Avertissement :** Pour les questions spécifiquement algorithmiques (I-2, I-4, I-5, I-6, I-7, III-16), on supposera que les déclarations suivantes ont été effectuées :

CONST

$n = 50$  ; (\* par exemple \*)

TYPE

MATRICE = ARRAY[1..n, 1..n] OF REAL;

Par contre, les candidats devront déclarer les variables locales qu'ils seront amenés à utiliser dans le corps des procédures et fonctions qu'on leur demande d'écrire.

I-Transformations élémentaires et matrices compagnons

Définition 3 : Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ ,  $E_{i,j}$  désigne la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les termes sont nuls, sauf  $E_{i,j}[i,j]$  qui est égal à 1. Le réel  $a$  étant donné, on définit les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} D_i(a) &= I_n + (a - 1)E_{i,i} ; \\ T_{i,j}(a) &= I_n + aE_{i,j}, \quad i \neq j ; \\ P_{i,j} &= I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}. \end{aligned}$$

On suppose maintenant  $n$  fixé, supérieur ou égal à 2. Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1) Comment  $A$  est-elle transformée si on la multiplie à droite par la matrice  $D_i(a)$ , par la matrice  $T_{i,j}(a)$ , ( $i \neq j$ ), par la matrice  $P_{i,j}$  ? Même question pour la multiplication à gauche.

2) Ecrire une procédure Ddroite qui transforme la matrice  $A$  en  $AD_i(a)$ , sans effectuer la multiplication des deux matrices  $A$  et  $D_i(a)$ . Plus précisément, on demande d'écrire le corps de la procédure suivante :

```
PROCEDURE Ddroite (VAR A : MATRICE ; i : INTEGER ; a : REAL) ;
(* Transforme la matrice A en AD_i(a) *)
VAR ...
BEGIN
:
END
```

3) Montrer que les matrices  $T_{i,j}(a)$ ,  $i \neq j$ , et  $P_{i,j}$  sont inversibles dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et calculer leur inverse. A quelle condition la matrice  $D_i(a)$  est-elle inversible ? Dans ce cas, quelle est son inverse ?

4) Ecrire une fonction ChercheNonNul qui recherche dans la colonne  $j$  de la matrice  $A$  un terme non nul dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à  $j + 1$ . Si les  $a_{i,j}$  avec  $i > j$  sont tous nuls, ChercheNonNul retourne  $n + 1$ , sinon ChercheNonNul retourne un indice  $i$  tel que  $i > j$  et  $a_{i,j} \neq 0$ . Plus précisément, on demande d'écrire le corps de la fonction suivante :

```
FUNCTION ChercheNonNul (A : MATRICE ; j : 1..n) : INTEGER ;
VAR ...
BEGIN
:
END
```

5) On suppose connues les procédures suivantes (on ne demande pas d'en écrire le corps) :

```
PROCEDURE Dgauche (VAR A : MATRICE ; i : INTEGER ; a : REAL) ;
(* Transforme la matrice A en D_i(a)A *)
```

```
PROCEDURE Tdroite (VAR A : MATRICE ; i, j : INTEGER ; a : REAL) ;
(* Transforme la matrice A en AT_{i,j}(a) *)
```

```
PROCEDURE Tgauche (VAR A : MATRICE ; i, j : INTEGER ; a : REAL) ;
(* Transforme la matrice A en T_{i,j}(a)A *)
```

```
PROCEDURE Pdroite (VAR A : MATRICE ; i, j : INTEGER) ;
(* Transforme la matrice A en AP_{i,j} *)
```

```
PROCEDURE Pgauche (VAR A : MATRICE ; i, j : INTEGER) ;
(* Transforme la matrice A en P_{i,j}A *)
```



II-Polynômes minimaux

**Objectif :** Le but de cette partie est d'établir les résultats qui permettront de transformer la matrice  $B'$  précédente, de type 1, en une matrice  $B$ , où  $B'_1$  sera nulle (ce qui fera l'objet de la partie III). Les questions 12, 13, 14 et 15 ne sont pas utiles dans la suite du problème, mais proposent une démonstration intéressante du théorème de Hamilton-Cayley.

**Définition 4 :** On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si et seulement si le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

Soit  $u$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  qui a pour matrice dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  la matrice  $A$ .

**Définition 5 :** On définit par récurrence l'endomorphisme  $u^k$  en posant :

$$u^0 = Id_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = u \circ u^{k-1}.$$

A tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ , on associe

$$P(u) = a_0Id_n + a_1u + \dots + a_mu^m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\mathcal{I}(u) = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(u) = 0_n\}.$$

Si  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , on définit

$$Px = a_0x + a_1u(x) + \dots + a_mu^m(x) \in \mathbb{R}^n,$$

et on note :

$$Z(x, u) = \{Px, P \in \mathbb{R}[X]\},$$

$$Ann(x, u) = \{P \in \mathbb{R}[X] / Px = 0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

8) Montrer que  $\mathcal{I}(u)$  est un idéal de  $\mathbb{R}[X]$ , non réduit au polynôme nul. En déduire qu'il est engendré par un unique polynôme unitaire, que l'on notera  $\Pi_u$  et que l'on appellera **polynôme minimal** de l'endomorphisme  $u$ .

9) Montrer que  $Ann(x, u)$  est un idéal de  $\mathbb{R}[X]$ , non réduit au polynôme nul. En déduire qu'il est engendré par un unique polynôme unitaire, que l'on notera  $\pi_x$  et que l'on désignera par **polynôme minimal** du vecteur  $x$  (associé à l'endomorphisme  $u$ ).

10) Montrer que  $Z(x, u)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que le système de vecteurs  $x, u(x), u^2(x), \dots, u^{\alpha-1}(x)$ , où  $\alpha$  désigne le degré du polynôme  $\pi_x$ , est une base de  $Z(x, u)$ .

11) Soit  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base dans laquelle l'endomorphisme  $u$  a pour matrice la matrice  $B'$  trouvée à la question I-6b. Montrer que le polynôme associé à la matrice  $C'_1$  est le polynôme minimal du vecteur  $f_1$  (associé à l'endomorphisme  $u$ ). En utilisant la question I-7, en déduire que c'est le polynôme minimal de  $e_1$ .

12) Soit  $C$  une matrice compagnon d'ordre  $n$ . Soit  $P$  son polynôme associé et  $P_C$  son polynôme caractéristique, défini par  $P_C(X) = \det(XI_n - C)$ . Montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $P = P_C$ .

13) Déduire des deux questions précédentes que le polynôme minimal d'un vecteur  $x$  non nul de  $\mathbb{R}^n$  divise le polynôme caractéristique  $P_A$  de la matrice  $A$ .

14) Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une base quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\Pi_u = \text{ppcm}(\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_n})$ . En déduire que le polynôme minimal  $\Pi_u$  divise le polynôme caractéristique  $P_A$  (théorème de Hamilton-Cayley).

15) En déduire que si  $A$  est une matrice compagnon,  $\Pi_u = P_A$ .

## III-Forme faible de Frobenius

16) Ecrire une procédure ZéroàDroite qui transforme la matrice  $B'$  du I-6b en une matrice  $B''$  de la forme :

$$(type\ 2) \quad B'' = \begin{pmatrix} & & & \vdots & b_{1,d+1} & \dots & b_{1,n} \\ & C'_1 & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & B''_2 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, on demande d'écrire le corps de la procédure suivante :

```

PROCEDURE ZéroàDroite(VAR B : MATRICE ; d : 2..n - 1) ;
(* Transforme la matrice B, supposée de type 1, en une matrice de type 2.
d est l'ordre de la matrice compagnon C'_1. *)
VAR ...
BEGIN
:
END

```

17) Soit  $(f_1, \dots, f_d, g_{d+1}, \dots, g_n)$  une base dans laquelle l'endomorphisme  $u$  a pour matrice  $B''$ . Supposons qu'il existe  $j_0 \in [d+1, n]$  tel que  $b_{1,j_0} \neq 0$ . Montrer que les vecteurs  $g_{j_0}, u(g_{j_0}), \dots, u^d(g_{j_0})$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^n$  et en déduire que le degré du polynôme minimal de  $g_{j_0}$  est supérieur ou égal à  $d+1$ .

18) En utilisant les questions III-17 et II-11, la procédure Compagnon et la procédure ZéroàDroite, montrer que la matrice  $A$  est semblable à une matrice :

$$B = \begin{pmatrix} & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ & C_1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & B_2 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \end{pmatrix},$$

où  $C_1$  est une matrice compagnon d'ordre supérieur ou égal à  $d$  (on ne demande pas ici d'écrire précisément une procédure).

19) Appliquer ce qui précède à l'exemple proposé dans la question I-6a. Calculer  $P_A(X)$ . Comment cela vous permet-il de vérifier vos calculs ?

**Conclusions :**

- En répétant les mêmes transformations sur la matrice  $B_2$ , on obtient une **forme faible de Frobenius** de la matrice  $A$ , c'est-à-dire une matrice  $F$  élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , semblable à  $A$ , telle que

$$F = \text{diag}(C_1, \dots, C_k)$$

où les  $C_j$  sont des matrices compagnons.

- Soit  $P$  le polynôme associé à la matrice compagnon  $C_j$ . Ecrivons sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P(X) = \prod_{l=1}^p (X - \lambda_l)^{\alpha_l}.$$

Dans cette écriture, il est sous-entendu que  $\alpha_l \in \mathbb{N}^*$  et que  $1 \leq l \neq l' \leq p \implies \lambda_l \neq \lambda_{l'}$ .  
Alors la matrice  $C_j$  est semblable (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ) à la matrice bloc-diagonale

$$\text{diag}_{1 \leq l \leq p}(J_{\alpha_l}(\lambda_l)),$$

où  $J_r(\lambda)$  est la matrice d'ordre  $r$  suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Tout ceci permet donc d'obtenir une **forme de Jordan** de la matrice  $A$ .