Banque PT 2025 : Epreuve de Mathématiques C

Préambule

1. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt$$

- L'application $t \longmapsto \frac{1}{t^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+ 0 < \frac{1}{t^4+1} < \frac{1}{t^4}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale proposée grâce au critère de comparaison des fonctions positives avec une intégrale de Riemann convergente.
- De même l'application $t \longmapsto \frac{t^2}{t^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{1}{t^4+1} \sim \frac{1}{t^4}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale proposée grâce au critère d'équivalence des fonctions positives avec une intégrale de Riemann convergente.

2. Enoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

   Voir cours

3. Comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$$

On effectue le changement de variable proposé $\frac{1}{t} = x$ qui est bien un changement de variable admissible puisque la fonction $\varphi: t \longmapsto \frac{1}{t}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$donc $dt = -\frac{dx}{x^2}$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_{+\infty}^{0} -\frac{dx}{x^2(\frac{1}{x^4}+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

Partie I

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h qui, à tout réel t de $\mathcal{D}_h$, associe :

$$h(t) = \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on calcule le discriminant Δ du trinôme du second degré $t^2+1-\sqrt{2}t$ et on obtient :

$$\Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -2 < 0$$

Ainsi ce trinôme du second degré ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et la fonction proposée est toujours définie

Ainsi $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$

2. Soit X un réel positif. Calculer $\int_0^X h(t)dt$ puis, à l'aide de ce résultat, $\int_X^0 h(-t)dt$.

   Soit X un réel positif, on a $\forall t \in \mathbb{R}, t^2+1-\sqrt{2}t > 0$ donc

$$\int_0^X h(t)dt = \left[\ln\left(t^2+1-\sqrt{2}t\right)\right]_0^X = \ln\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)$$

On en déduit

$$\int_X^0 h(-t)dt = \int_0^{-X} h(t)dt = \ln\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)$$

3. Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x (h(t)+h(-t))dt \,?$$

Soit X un réel positif, on a

$$\int_0^X \left(h(t)+h(-t)\right)dt = \int_0^X h(t)dt + \int_0^X h(-t)dt = \ln\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right) - \ln\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)$$

Ainsi

$$\int_0^X \left(h(t)+h(-t)\right)dt = \ln\left(\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X}\right) \xrightarrow[x\mapsto+\infty]{} 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \left(h(t)+h(-t)\right)dt = 0$$

4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ qui, à tout réel t, associe :

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

On écrit :

$$\int \varphi(t)dt = 2\int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2+1} = \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

5. On considère la fonction g qui, à tout réel t de son domaine de définition $\mathcal{D}_g$, associe :

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t}$$

Montrer que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h$, puis déterminer une primitive G de g sur $\mathcal{D}_g$.

De la même façon qu'à la question 1. Le déterminant du trinôme du dénominateur est strictement négatif donc ce trinôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

De plus, $g = \sqrt{2}\,\varphi$ donc

$$\int g(t)dt = 2\arctan\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

6. Utiliser la primitive de g obtenue lors du calcul de la question précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif X :

$$\int_0^X g(-t)dt$$

On a

$$\int_0^X g(-t)dt = -\int_0^{-X} g(u)du = -\left[2\arctan\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{-X}$$

Donc

$$\int_0^X g(-t)dt = 2\arctan\sqrt{2}\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}$$

7. Déterminer :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X (g(t)+g(-t))dt$$

On a

$$\int_0^X (g(t)+g(-t))dt = \left[2\arctan\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^X + 2\arctan\sqrt{2}\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\int_0^X (g(t)+g(-t))dt = 2\arctan\sqrt{2}\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\arctan\sqrt{2}\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X (g(t)+g(-t))dt = 2\pi$$

8. Calculer, pour tout réel $t \geq 0$:

$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)$$

Pour tout réel $t \geq 0$ on a :

$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t}-\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t}+\frac{\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t}+\frac{\sqrt{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t}$$

donc

$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \frac{2t}{t^2+1-\sqrt{2}t}-\frac{2t}{t^2+1+\sqrt{2}t}$$

d'où

$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)=2t\left(\frac{t^2+1+\sqrt{2}t-(t^2+1-\sqrt{2}t)}{(t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)}\right)=4\sqrt{2}\frac{t^2}{t^4+1}$$

9.

a) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}dt\ ?$$

D'après la question précédente

$$4\sqrt{2}\int_0^X\frac{t^2}{t^4+1}dt=\int_0^X h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)dt=\int_0^X h(t)+h(-t)dt+\int_0^X g(t)+g(-t)dt$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\big(h(t)+h(-t)\big)dt=0$$

Et

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\big(g(t)+g(-t)\big)dt=2\pi$$

donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

b) Déduire des questions précédentes et du Préambule la valeur de

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}$$

D'après le Préambule on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

10. Calculer $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^2}{t^4+1}dt$. On donnera la réponse en fonction de Arctan2 et ln (5).

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^2}{t^4+1}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}h(t)+h(-t)dt+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}g(t)+g(-t)dt$$

Donc

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^2}{t^4+1}dt=\ln\left(\frac{1/2+1-1}{1/2+1+1}\right)+\underbrace{2\arctan\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{=0}+2\arctan\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^2}{t^4+1}dt = -\ln 5 + 2\arctan 2$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^2}{t^4+1}dt = \frac{2\arctan 2 - \ln 5}{4\sqrt{2}}$$

Partie II

1) Dans cette question, C et S désignent deux fonctions à valeurs réelles, paires, définies sur un intervalle de la forme $]-R,R[$, où R est soit un réel strictement positif, soit $+\infty$. On considère les équations différentielles suivantes :

$$\forall x \in]-R,R[: C'(x) = -2xS(x) \ (\mathcal{E}_1)$$

et

$$\forall x \in]-R,R[: S'(x) = 2xC(x) \qquad (2)$$

avec les conditions initiales

$$C(0) = 1 \ \text{ et } \ S(0) = 0$$

Le but de cette question est de déterminer les expressions des fonctions C et S, en recherchant leur développement en série entière sur $]-R,R[$.

a) Pour tout réel x de $]-R,R[$, on pose :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \text{ et } \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Montrer que, pour tout, entier naturel non nul n :

$$(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1} \ \text{ et } \ (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}$$

On a $C(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 1$ et $S(0) = 0 \Longrightarrow b_0 = 0$

On a aussi

$$C'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n$$

Et

$$-2xS(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x^n$$

Or $S'(0) = C'(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$ et $b_1 = 0$

Donc $\forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1}$

De même

$$S'(x) = 2xC(x) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\, b_{n+1}x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \Leftrightarrow b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\, b_{n+1}x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$$

Or $b_1 = 0$ donc :

$$\forall n \geq 1, (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$$

D'après la question précédente on a :

$$\forall n \geq 3, a_{n+1} = -\frac{2}{n+1}b_{n-1} = -\frac{2}{n+1}\frac{2}{n-1}a_{n-3} = -\frac{4}{(n+1)(n-1)}a_{n-3}$$

D'où le résultat annoncé

c) On rappelle que les fonctions C et S sont supposées paires. Que peut-on en déduire pour les coefficients de leurs développements en série entière respectifs ?

On en déduit que tous les coefficients d'indices impairs sont nuls. Soit $\forall n \geq 0, a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$

d)

(i). Montrer que tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :$n = 4p$ ou $n = 4p+1$ ou $n = 4p+2$ ou $n = 4p+3$ où p est dans $\mathbb{N}$.

Dans une division euclidienne d'un entier n par 4 il y a quatre restes possibles : 0, 1, 2 ou 3. On en déduit les quatre formes de décomposition de l'entier n proposées par l'énoncé.

(ii). Montrer que, pour tout entier naturel n qui n'est pas multiple de 4 :

$$a_n = 0$$

- On sait déjà que, pour tout n impair on a $a_n = 0$
- Donc reste à montrer que tous les termes d'indices *pairs* mais non multiples de 4 sont nuls. Autrement dit : $\forall n, a_{4n+2} = 0$. On procède par récurrence sur n :
  - Si $n = 0$: on sait que $b_1 = 0$ donc $2a_2 == -2b_0 = 0$ et la propriété est avérée au rang $n = 0$
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $a_{4n+2} = 0$ alors

$$a_{4(n+1)+2} = -\frac{4}{(4n+6)(4n+4)}a_{4n+2} = 0$$

D'où le résultat

e) Montrer que, pour tout entier naturel p :

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)\,!}$$

On montre aisément le résultat proposé par récurrence sur tout entier naturel p

f) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ de donner, pour tout réel x de $]-R, R[$, une expression simplifiée de $C(x)$, puis de $S(x)$.

On applique le critère de d'Alembert et on calcule :

$$\left| -\frac{a_{4(p+1)}}{a_{4p}} \right| |x|^4 = \frac{(2\mathrm{p})!}{\big(2(p+1)\big)!} |x|^4 = \frac{1}{2(p+1)(2p+1)} |x|^4 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Donc le rayon de convergence de cette série entière est infini

Et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)\,!} x^{4p} = \cos x^2$$

Et $\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = 2xC(x) = \cos x^2$ d'où $S(x) = \sin x^2 + K$ où $K \in \mathbb{R}$. Or, $S(0) = 0$ donc $K = 0$ et, par suite, $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sin x^2$

2) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$.

a) Préciser le rayon de convergence R' de cette série entière, puis, pour tout, réel x de $]-R', R'[$ exprimer la somme $D(x)$ de la séric $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ en fonction de x.

La série numérique

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{4n}$$

est une série géométrique convergente si et seulement si $|-x^4| < 1$, autrement dit, si et seulement si $|x| < 1$. Ainsi le rayon de convergence $R' = 1$

$$\forall x \in]-1;+1[, \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$$

b) Montrer que $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique, que l'on explicitera.

De la question précédente on déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n} dx$$

En effet, $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ et la série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence et on peut permuter les deux signes « somme ».

c) Que vaut :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} ?$$

D'après la question précédente on obtient donc :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n} dx = \left[\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}}{4n+1} = \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)\sqrt{2}}$$

Partie III

Pour tout réel $X > 0$, on pose :

$$I(X) = \int_1^X \cos(t^2) dt , J(X) = \int_1^X \sin(t^2) dt$$

1) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t > 1, -t^2 < -t \Longrightarrow 0 < e^{-t^2} < e^{-t}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale proposée grâce au critère de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives.

On peut aussi dire que, par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale proposé grâce au critère de domination par rapport à une intégrale de Riemann convergente.

On donne, pour la suite du problème :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) Etudier la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$$

On a

$$\left|\frac{\sin(t^2)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

ce qui assure l'absolue convergence (et donc la convergence) de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} d$$

grâce au critère de comparaison des fonctions positives par rapport à une intégrale de Riemann convergente.

Un raisonnement en tout point analogue assure la convergnce de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$$

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que les limites

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) \text{ et } \lim_{X\to+\infty} J(X)$$

existent et sont finies.

Soit $X > 0$, on a

$$I(X) = \int_1^X \cos(t^2) dt = \int_1^X \frac{1}{2t} 2t\cos(t^2) dt = \left[\frac{\sin(t^2)}{2t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(t^2)}{2t^2} dt$$

Donc

$$I(X) = \frac{\sin(X^2)}{2X} - \frac{\sin(1)}{2} + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt$$

Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin(X^2)}{2X} = 0$$

Et

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin(t^2)}{t^2}dt$$

Existe puisque l'intégrale est convergente. Par suite $\lim_{X\to+\infty} I(X)$ existe bien et est finie.

Un raisonnement tout à fait similaire permet d'affirmer l'existence et la finitude de $\lim_{X\to+\infty} J(X)$

4) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2}dt$$

On vient de montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)$ et de $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)$. Or,

$$\forall X>0, \int_1^X e^{it^2}dt = I(X)+iJ(X)$$

Ce qui assure la convergence de

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2}dt$$

5) Donner le développement en série entière de la fonction

$$t\mapsto e^{it^2}$$

On sait que

$$\forall t\in\mathbb{R}, e^{it^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n t^{2n}}{n!}$$

6. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f :

$$x\mapsto f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}dt$$

La fonction $(x;t)\mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, ce qui assure l'existence de l'intégrale en 0 pour tout x réel.

De plus

$$\forall t\in\mathbb{R}_+, \left|\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right| = \left|\frac{e^{-t^2x^2}e^{-ix^2}}{t^2+i}\right| = \frac{1}{|t^2+i|}e^{-t^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}e^{-t^2x^2} \le \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \le \frac{1}{t^2}$$

Ce qui assure l'absolue convergence (et donc la convergence) de l'intégrale proposée en $+\infty$ pour tout x réel par comparaison à une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$.

Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

(b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

Pour tout réel strictement positif x on effectue le changement de variable $u = xt$ donc $du = xdt$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

(c) Déduire de la question précédente la valeur de :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Pour tout réel strictement positif x on a :

$$|f(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{|t^2+i|} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

(d) Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction f introduite à la question 6. (a) (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, a]$, où ε et a sont deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leq a$).

Conformément aux indications de l'énoncé on se place sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, a]$, où ε et a sont deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leq a$

- Pour tout réel strictement positif x, la fonction $t \longmapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
- Pour tout réel positif t, la fonction $x \longmapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, a]$
- $\forall (x; t) \in [\varepsilon, a] \times \mathbb{R}_+, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right) = -2x(t^2+i)\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} = -2xe^{-(t^2+i)x^2}$
  Donc $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right)\right| \leq 2ae^{-t^2x^2} \leq 2ae^{-t^2\varepsilon^2}$
  Or la fonction $t \longmapsto 2ae^{-t^2\varepsilon^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
- Ainsi, d'après le théorème sur la dérivation des intégrales à paramètres la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$$

Est dérivable sur $[\varepsilon, a]$

La fonction f étant dérivable sur tout segment $[\varepsilon, a]$ de $\mathbb{R}_+^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right) dt$$

(e) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales généralisées à paramètre, on obtient :

$$\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right) dt = \int_0^{+\infty} -2xe^{-(t^2+i)x^2} dt = -2xe^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt$$

Donc

$$f'(x) == -2xe^{-ix^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2x} = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$$

(f) En déduire, à l'aide des résultats de la ***Partie I***, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$$

puis de

$$\int_0^{+\infty} C(x)dx \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)dx$$

où S et C sont les fonctions introduites au début de la Partie II.

On a $f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$ donc $e^{-ix^2} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} f'(x)$ Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f'(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} [f(x)]_0^{+\infty}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+i} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+i} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+i} dt - i\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+i}$$

Donc

$$f(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

En conclusion

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{f(0)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Et

$$\int_0^{+\infty} C(x)dx = \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Et

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \text{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe) $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$, connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toules les valeurs de x peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumincuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en comple et on somme les effels de cette imfinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Tresnel, en physique.

Fin de l'énoncé