I Matrices compagnon et endomorphismes cycliques :

1. **Q 1** On a pour tout $x \in \mathbb{K}$, les égalités :

$$\begin{aligned} \chi_M(x) &= \det(x.I_n - M) \\ &= \det\left((x.I_n - M)^T\right) \\ &= \det\left(x.I_n - M^T\right) \\ &= \chi_{M^T}(x) \end{aligned}$$

Donc les matrices M et sa transposé M^T ont même polynômes caracteristique. Mais

$$\begin{cases} sp(M) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_M) \\ sp\left(M^T\right) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_{M^T}) \end{cases}$$

Où $Z_{\mathbb{K}}(\chi_M)$ (respectivement $Z_{\mathbb{K}}(\chi_{M^T})$) désigne l'ensembles des racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme χ_M (respectivement χ_{M^T})
D'où l'égalité $sp(M) = sp\left(M^T\right)$.

Q 2 Comme $\left(M^T\right)^T = M$, alors il suffit de montrer un seul sens. En effet supposons M^T diagonalisable ; donc il existent $P \in GL_n(K)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que $M^T = P.D.P^{-1}$. Donc compte tenu des propriétés de la transposition et de la symétrie d'une matrice diagonale, on a

$$\begin{aligned} \left(M^T\right)^T &= \left(P.D.P^{-1}\right)^T \\ &= \left(P^{-1}\right)^T.D^T.P^T \\ &= \left(P^T\right)^{-1}.D.P^T \end{aligned}$$

Donc $M = \left(P^T\right)^{-1}.D.P^T$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la matrice diagonale D; Donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 3 Si $x \in \mathbb{K}$, alors, $\chi_{C_Q}(x) = \det\left(x.I_n - C_Q\right) = \begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$

Mais en éffectuant l'opération $L_1 \hookleftarrow L_1 + x.L_2 + ... + x^{n-1}.L_n$, ce déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Q(x) \\ -1 & x & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Et en développant ce dernier déterminant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Q(x) \\ -1 & x & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} Q(x) \,.\, \det(I_{n-1})$$

D'où

$$\chi_{C_Q} = Q$$

Proof.

(a) **Q 4** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. alors

$$X \in E_\lambda\left(C_Q^T\right) \text{ ssi } C_Q^T.X = \lambda.X \text{ ssi } \left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{array}\right.$$

$$\text{ssi } \left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{array}\right.$$

$$\text{ssi } \left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0x_1 - a_1\lambda x_1 - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1}x_1 = \lambda\left(\lambda^{n-1}x_1\right) \end{array}\right.$$

$$\text{ssi } \left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 Q(\lambda) = 0 \end{array}\right.$$

Or λ est valeur propre de C_Q^T. Donc d'après Q 1, λ est valeur propre de C_Q, donc λ est racine de son polynôme caracteristique $\chi_{C_Q} = Q$. Donc $Q(\lambda) = 0$. Donc le dérnier système équivaut à $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 Q(\lambda) = 0 \end{cases}$.

Par suite $X \in E_\lambda\left(C_Q^T\right)$ ssi $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 Q(\lambda) = 0 \end{cases}$ ssi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 \\ \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Donc le sous-espace propre $E_\lambda\left(C_Q^T\right)$ de C_Q^T associé à la valeur propre λ est la droite vectoriel $\mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Q 5 * Supposons f cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E. Et si on note $\beta_0, ..., \beta_{n-1}$ les cordonnées dans cette base du vecteur $f^n(x_0)$, alors

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \beta_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ est la matrice compagnon du polynôme $Q = X^n - \beta_{n-1}X^{n-1} - ... - \beta_0$ qui est unitaire et de degré n.

* Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) =$

C_Q où $Q = X^n + \gamma_{n-1}X^{n-1} + ... + \gamma_0$ est un polynôme unitaire et de degré n. Donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\gamma_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -\gamma_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -\gamma_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = e_3 \\ \vdots \\ f(e_{n-1}) = e_n \end{cases}$$

ou encore $e_2 = f(e_1), e_3 = f^2(e_1), ..., e_n = f^{n-1}(e_1)$. Donc $\mathcal{B} = \left(e_1, f(e_1) ..., f^{n-1}(e_1)\right)$ et c'est une base de E. Donc f est cyclique.

Q 6 Comme f est cyclique, alors d'après Q 5, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$., avec Q un polynôme unitaire de degré n. En particulier, on a $\chi_f = \chi_{C_Q} = Q$..

* Supposons f diagonalisable, alors $C_Q = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable, donc d'après Q 2, C_Q^T est diagonalisable.

Donc $\sum\limits_{\lambda \in sp\left(C_Q^T\right)} \dim\left(E_\lambda\left(C_Q^T\right)\right) = n$. mais on a vu dans Q 4, que chaque sous-espace propre $E_\lambda\left(C_Q^T\right)$ est une droite vectoriel. Donc l'égalité précédente devient $card\left(sp\left(C_Q^T\right)\right) = n$. Mais $sp\left(C_Q^T\right) = Z_{\mathbb{K}}\left(\chi_{C_Q^T}\right)$ et $\chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = Q$.

Donc $card\left(Z_{\mathbb{K}}(Q)\right) = n$; or $\deg(Q) = n$. Donc $\chi_f = Q$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Réciproquement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, alors f admet n valeurs propres distincts, donc f est diagonalisable.

Q 7 Si f et cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E. Et soit $\beta_0, ..., \beta_{n-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\beta_0.Id + \beta_1.f + ... + \beta_{n-1}.f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc en appliquant x_0, on obtient $\beta_0.x_0 + \beta_1.f(x_0) + ... + \beta_{n-1}.f^{n-1}(x_0) = 0_E$. mais $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E donc libre.

Donc $\beta_0 = ... = \beta_{n-1} = 0$. Par suite la famille $\left(Id, f, ..., f^{n-1}\right)$ est libre et donc tout polynôme annulateur de f de degré $\leq n-1$ est nul. Donc $\deg(\pi_f) \geq n$. Mais comme π_f divise χ_f et $\deg\left(\chi_f\right) = n$, alors $\deg(\pi_f) \leq n$. D'où $\deg(\pi_f) = n$.

Q 8 Comme $x \neq 0_E$, alors la famille (x) constitué du vecteur x est libre ; donc la partie de $\mathbb{N}$, constitué des entiers naturels $k \in \mathbb{N}^*$, tel que la famille $\left(x, f(x), ..., f^{k-1}(x)\right)$ est libre, contient 1, donc non vide. Donc admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$ est libre et $\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x), f^p(x)\right)$ est liée.

Donc $f^p(x) \in vect\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$; par suite il existe $\left(\alpha_0, ..., \alpha_{p-1}\right) \in \mathbb{K}^p$ tel que $f^p(x) = -\alpha_0.x - \alpha_1 f(x) - ... - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x)$ ou encore $\alpha_0.x + \alpha_1 f(x) + ... + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0_E$.

Q 9 D'après ce qui précède,

$$f\left(f^{p-1}(x)\right) = f^p(x) \in vect\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$$

et

$$\forall k \in \{0, ..., p-2\}, f\left(f^k(x)\right) = f^{k+1}(x) \in vect\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$$

Donc $vect\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$ est stable par f.

Q 10 Notons $F = vect\left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$, $\mathcal{C} = \left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$ et $g = f/F$, l'endomorphisme de F induit par f. Comme $\mathcal{C} = \left(x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\right)$ est libre, alors c'est une base de F et

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{p-1} \end{pmatrix} = C_Q$$

avec $Q = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + ... + \alpha_0$. En particulier $\chi_g = \chi_{C_Q} = Q$. Mais χ_g divise χ_f puisque g est un endomorphisme induit par f. Donc $Q = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + ... + \alpha_0$ divise χ_f

Q 11 Comme $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + ... + \alpha_0$ divise χ_f, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = P.\left(X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + ... + \alpha_0\right)$. Donc $\chi_f(f) = P(f).\left(f^p + \alpha_{p-1}f^{p-1} + ... + \alpha_0.Id\right)$ et $\chi_f(f)(x) = P(f)\left(\left(f^p + \alpha_{p-1}f^{p-1} + ... + \alpha_0.Id\right)(x)\right)$. Donc

$$\chi_f(f)(x) = P(f).\left(f^p(x) + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + ... + \alpha_0.x\right)$$

Mais $f^p(x) + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + ... + \alpha_0.x = 0_E$. Donc $\chi_f(f)(x) = 0_E$.

On a donc montré que $\forall x \in E\setminus\{0_E\}$, $\chi_f(f)(x) = 0_E$. Donc $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est l'endomorphisme nul de E.

Q 12 Comme f est supposé nilpotent d'indice r, alors son polynôme minimal est X^r.

* Supposons f cyclique, alors d'après Q-7, deg $\left(\pi_f\right) = n$. mais comme $\pi_f = X^r$, alors $r = n$.

* Réciproquement, supposons $r = n$. Donc f est nilpotent d'indice n, donc $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, alors on montre (c'est classique) que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre. De plus c'est une famille de n

vecteurs de E, donc c'est une base de E; Par suite f est cyclique et

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ où $Q = X^n$.

Q-13 Les λ_k sont supposés deux à deux distincts, donc les polynômes $(X-\lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Donc d'après le lemme des noyaux,

$$\ker\left[\left(\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}\right)(f)\right] = \ker\left[(X-\lambda_1)^{m_1}(f)\right] \oplus .... \oplus \ker\left[\left(X-\lambda_p\right)^{m_p}(f)\right]$$

ou encore

$$\ker\left[\chi_f(f)\right] = F_1 \oplus .... \oplus F_p$$

Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.D'où l'égalité $E = F_1 \oplus .... \oplus F_p$.

D'autre part, pour chaque $k \in \{1, ..., p\}$, l'endomorphisme $(X-\lambda_1)^{m_1}(f)$ étant un polynôme en f, donc commute avec f donc son noyau $F_k = \ker\left[(X-\lambda_1)^{m_1}(f)\right]$ est stable par f.

Q-14 On a $\forall x \in F_k = \ker\left[(f-\lambda_k.Id_E)^{m_k}\right]$, $(f-\lambda_k.Id_E)^{m_k}(x) = 0_E$. Donc $\forall x \in F_k$, $\varphi_k^{m_k}(x) = 0_E$. D'où $\varphi_k^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$ et par suite φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

Q-15 Comme υ_k est l'indice de nilpotence de φ_k, alors son polynôme minimal $\pi_{\varphi_k} = X^{\upsilon_k}$. D'autre part, puisque φ_k est un endomorphisme de F_k, alors $\deg\left(\pi_{\varphi_k}\right) \leq \dim F_k$. D'où $\upsilon_k \leq \dim F_k$.

Q-16 L'hypothèse $\left(Id, f, f^2, f^{n-1}\right)$ libre implique (voir Q 7) $\deg\left(\pi_f\right) = n$ et donc $\pi_f = \chi_f$. Donc $\pi_f = \prod\limits_{k=1}^{p}(X-\lambda_k.)^{m_k}$.

D'autre part, on a vu en Q 14, que pour tout $1 \leq k \leq p$, $\varphi_k^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$. Donc pour tout $1 \leq k \leq p$, $\upsilon_k \leq m_k$.

Montrons alors que pour tout $1 \leq k \leq p$, $\upsilon_k = m_k$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $1 \leq k \leq p$, tel que $\upsilon_k \leq m_k - 1$. Donc $\varphi_k^{m_k-1} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$, donc $F_k = \ker\left[(f-\lambda_k.Id_E)^{m_k-1}\right]$. Mais $E = F_1 \oplus ... \oplus F_k \oplus ... \oplus F_p$ ou encore

$$E = \ker\left[(f-\lambda_1.Id_E)^{m_1}\right] \oplus ... \oplus \ker\left[(f-\lambda_k.Id_E)^{m_k-1}\right] \oplus ... \oplus \ker\left[\left(f-\lambda_p.Id_E\right)^{m_p}\right]$$

Mais les polynômes $(X-\lambda_1)^{m_1}, ..., (X-\lambda_k.)^{m_k-1}, ..., \left(X-\lambda_p\right)^{m_p}$ sont deux à deux premiers entre eux, donc

$$\ker\left[(f-\lambda_1.Id_E)^{m_1}\right] \oplus ... \oplus \ker\left[(f-\lambda_k.Id_E)^{m_k-1}\right] \oplus ... \oplus \ker\left[\left(f-\lambda_p.Id_E\right)^{m_p}\right] = \ker\left[\left((X-\lambda\right.\right.$$

Donc

$$E = \ker\left[\left((X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_k.)^{m_k-1} \dots \left(X-\lambda_p\right)^{m_p}\right)(f)\right]$$

et par suite $(X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_k.)^{m_k-1} \dots \left(X-\lambda_p\right)^{m_p}$ est un polynôme annulateur de f, donc $\pi_f = \prod\limits_{j=1}^{p} (X-\lambda_k.)^{m_j}$ divise $(X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_k.)^{m_k-1} \dots \left(X-\lambda_p\right)^{m_p}$; ce qui est absurde pour raison de degré. Donc pour tout $1 \leq k \leq p$, $\upsilon_k = m_k$.

Q 17 On conclut par les deux dernières questions que pour tout $1 \leq k \leq p$, $m_k \leq \dim F_k$. Mais comme $E = F_1 \oplus \dots . \oplus F_p$, alors $\sum\limits_{k=1}^{p} \dim F_k = n$, d'autre part, $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k = n$ puisque $\chi_f = \prod\limits_{j=1}^{p} (X-\lambda_k.)^{m_j}$ est de degré n. D'où $\forall\, 1 \leq k \leq p$, $\dim F_k = m_k$.

D'autre part, pour chaque $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice de nilpotence $m_k = \dim F_k$, donc cyclique d'après Q-12, donc toujours d'après la même question, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de la forme $\left(v_{1,k}, \varphi_k(v_{1,k}), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(v_{1,k})\right) = \left(v_{1,k}, \left(f_k - \lambda_k.Id_{F_k}\right)(v_{1,k}), \dots, \left(f_k - \lambda_k.Id_{F_k}\right)^{m_k-1}(v_{1,k})\right)$ de F_k telle que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = C_{X^{m_k}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Où on a noté f_k, l'endomorphisme de F_k induit par f, alors $f_k = \varphi_k + \lambda_k Id_{F_k}$ et par suite

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Mais comme $E = F_1 \oplus \dots . \oplus F_p$ et les F_k stables par f, alors en notatnt $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$ la base de E obtenue en juxtaposant les $\mathcal{B}_k$, on a

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = diag\left(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(f_1), \dots, \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_k}(f_k)\right)$$

Remarquons au passage que $\pi_{f_k} = (X-\lambda_k)^{m_k}$, en effet puisque φ_k est nilpotent d'indice m_k, alors $\varphi_k^{m_k} = 0$ et $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$; Donc $\left(f_k - \lambda_k Id_{F_k}\right)^{m_k} = 0$ et $\left(f_k - \lambda_k Id_{F_k}\right)^{m_k-1} \neq 0$. Par suite $\pi_{f_k} = (X-\lambda_k)^{m_k}$.

Q 18 Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, alors par linéarité $Q(f)$, on a

$$Q(f)(x_0) = 0_E \;\text{ ssi }\; Q(f)(u_1) + Q(f)(u_{m_1+1}) + \dots + Q(f)\left(u_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}\right) = 0_E$$

Mais $\left(u_1, u_{m_1+1}, ..., u_{m_1+...+m_{p-1}+1}\right) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p$ et chacun de ces sous-espaces F_k est stable par f, donc stable par $Q(f)$. Donc $\Big(Q(f)(u_1), Q(f)(u_{m_1+1}), ..., Q(f)\big(u_{m_1+...+m_{p-1}+$
$F_1 \times F_2 \times ... \times F_p$ et de plus la somme $F_1 + F_2 + ... + F_p$ de ces sous-espaces F_k est directe. Donc l'égalité

$$Q(f)(u_1) + Q(f)(u_{m_1+1}) + ... + Q(f)\left(u_{m_1+...+m_{p-1}+1}\right) = 0_E$$

est équivalente à

$$Q(f)(u_1) = Q(f)(u_{m_1+1}) = ... = Q(f)\left(u_{m_1+...+m_{p-1}+1}\right) = 0_E$$

Mais u_1 est le premier vecteur de $\mathcal{B}_1$, donc $\mathcal{B}_1 = \Big(u_1, (f_1 - \lambda_1.Id_{F_1})(u_1), ..., (f_1 - \lambda_1.Id_{F_1})^{m_1-1}($
De même u_{m_1+1} est le premier vecteur de $\mathcal{B}_2$, donc $\mathcal{B}_2 = \Big(u_{m_1+1}, (f_2 - \lambda_2.Id_{F_2})(u_{m_1+1}), ..., (f_2 -$
De même $u_{m_1+...+m_{p-1}+1}$ est le premier vecteur de $\mathcal{B}_p$, donc $\mathcal{B}_p = \Big(u_{m_1+...+m_{p-1}+1}, \big(f_p - \lambda_p.Id_{F_p}$
Donc si $Q(f)(u_1) = 0_E$, alors $Q(f_1)(u_1) = 0_E$, donc $\forall k \in \{0, ..., m_1 - 1\}$,

$$\begin{aligned} Q(f_1)\left((f_1 - \lambda_1.Id_{F_1})^k (u_1)\right) &= (f_1 - \lambda_1.Id_{F_1})^k (Q(f_1)(u_1)) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

La première égalité découle du fait que les endomorphismes $Q(f_1)$ et $(f_1 - \lambda_1.Id_{F_1})^k$ commutent, car chacun est polynôme en f_1. Donc $Q(f)(u_1) = 0_E$ ssi $Q(f_1) = 0_{\mathcal{L}(F_1)}$. Mais on a vu en remarque que $\pi_{f_1} = (X - \lambda_1)^{m_1}$.
Donc l'égalité $Q(f)(u_1) = 0_E$ ssi $(X - \lambda_1)^{m_1}$ divise Q. De même l'égalité $Q(f)(u_{m_1+1}) = 0_E$ ssi $(X - \lambda_2)^{m_2}$ divise Q. Et l'égalité $Q(f)\left(u_{m_1+...+m_{p-1}+1}\right) = 0_E$ équivaut à $\left(X - \lambda_p\right)^{m_p}$ divise Q.
En conclusion $Q(f)(x_0) = 0_E$ ssi $\forall k \in \{1, ..., p\}$, $(X - \lambda_k)^{m_k}$ divise Q. Mais les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ ($1 \leq k \leq p$) sont deus à deux premiers entre eux puisque les λ_k sont deux à deux distincts. Donc
$Q(f)(x_0) = 0_E$ ssi $\chi_f = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ divise Q.

Q 19 Montrons que la famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E. Il suffit de montrer la liberté, en effet soientt $\beta_0, ..., \beta_{n-1}$ des complexes, tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k.f^k(x_0) = 0_E$.Donc $Q(f)(x_0) = 0_E$ où $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$. Donc d'après ce qui précède, χ_f divise Q. Mais $\deg\left(\chi_f\right) = n$ et $\deg(Q) \leq n - 1$; Donc $Q = 0$ et par suite $\beta_0 = ... = \beta_{n-1} = 0$.
Donc la famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E. D'où f est cyclique.

Q 20 On montre aisèment que $id_E \in \mathcal{C}(f)$ et que $\mathcal{C}(f)$ est stable par combinaison linéaire et par composition.*

Q 21 On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ une base de E, d'où l'existence de $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k(x_0)$$

Q 22 Soit $i \in \{0, ..., n-1\}$. Comme $g \in \mathcal{C}(f)$, alors $f \in \mathcal{C}(g)$, donc $f^i \in \mathcal{C}(g)$ puisque $\mathcal{C}(g)$ sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
Donc $g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0))$. Mais en composant l'égalité précédente par l'endomorphisme f^i et on obtient

$$\begin{aligned} f^i(g(x_0)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^i\left(f^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . \left(f^i . f^k\right)(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . \left(f^k . f^i\right)(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k\left(f^i(x_0)\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k\right)\left(f^i(x_0)\right) \end{aligned}$$

On a donc $g(f^i(x_0)) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k\right)(f^i(x_0))$. Donc les endomorphismes g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k$ sont égales en chaque vecteur de la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$. Donc égaux, d'où $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k \in \mathbb{K}[f]$.

Q 23 Si $g \in \mathcal{C}(f)$, alors d'après ce qui précède, ils existe $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . f^k$$

Donc $g = R(f)$, avec $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k . X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Réciproquement, s'il existe $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$ .Or $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et contient f, donc contient $g = R(f)$. Donc $g \in \mathcal{C}(f)$ .En conclusion $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f] = vect\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$.
En particulier $\dim \mathcal{C}(f) = n$ puisque la liberté de la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ implique la liberté de $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$

Q 24 Montrons par récurrence sur $\dim F$ que si $F = \bigcup\limits_{k=1}^{r} F_k$.est un sous-espace vectoriel de E, alors l'un des sous-espaces vectoriels F_i contient tous les autres, c'est à dire il existe $1 \leq i \leq r$, tel que $F = F_i$:

* Supposons $F = \bigcup_{k=1}^{r} F_k$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Donc il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $F_i \neq \{0_E\}$ et $F_i \subset F$ donc $1 \leq \dim F_i \leq \dim F = 1$. Donc $\dim F_i = \dim F = 1$ et donc $F = F_i$.

* Soit $q \geq 1$ et supposons que si $F = \bigcup_{k=1}^{r} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension q, alors F est l'un des F_i.

Et soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de E tels que leur union qu'on notera encore F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $q+1$. Alors F est l'un des F_i, en effet raisonnons par l'absurde et supposons $F_i \subsetneq F$ pour tout $1 \leq i \leq r$, et considèrons un hyperplan quelconque H de F. Donc $\dim H = q$ et $H = \bigcup_{k=1}^{r} F_k \cap H$.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe $1 \leq i \leq r$, tel que $H = F_i \cap H$. Donc $H \subset F_i \subsetneq F$, donc pour raison de dimension, $H = F_i$. Donc chaque hyperplan de F est l'un des F_i. Ce qui contredit le fait que F admet une infinité d'hyperplans. Donc F est l'un des F_i et la récurrence est achevé.

Q 25 Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, on vérifie que I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et non réduit au polynôme nul, puisqu'il contient π_f, donc il est engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ et $\pi_{f,x}$ divise π_f puisque $\pi_f \in I_x = \pi_{f,x}.\mathbb{K}[X]$.

Mais π_f étant un polynôme unitaire de degré ≥ 1, donc admet un nombre fini de diviseurs unitaires. Donc l'ensemble $\{\pi_{f,x} \ / \ x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est fini, donc la famille $\left(\ker\left(\pi_{f,x}\right) \ / \ x \in E \setminus \{0_E\}\right)$ constituées de leurs noyaux est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. D'autre part, $\bigcup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \ker\left(\pi_{f,x}\right) = E$.(En effet soit $x \in E \setminus \{0_E\}$; comme $I_x = \pi_{f,x}.\mathbb{K}[X]$, alors $\pi_{f,x}(f)(x) = 0_E$, donc $x \in \ker\left(\pi_{f,x}\right)$ ...). Donc d'après Q-24, il existe $x_1 \in E$ tel que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\ker\left(\pi_{f,x}\right) \subset \ker\left(\pi_{f,x_1}\right)$.

Donc $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\pi_{f,x_1}(f)(x) = 0_E$, donc π_{f,x_1} est annulateur de f, donc π_f divise π_{f,x_1}. Mais π_{f,x_1} divise π_f ; et étant tous les deux unitaires, donc égaux, soit $\pi_{f,x_1} = \pi_f$, en particulier $\deg\left(\pi_{f,x_1}\right) = d$; ceci permet alors de montrer la liberté de la famille $\left(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1)\right)$. En effet, si $\alpha_0, ..., \alpha_{d-1}$ sont dans $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k.f^k(x_1) = 0_E$, alors $P(f)(x_1) = 0_E$ avec $P = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k.X^k$. Donc $P \in I_{x_1} = \pi_{f,x_1}.\mathbb{K}[X]$, donc π_{f,x_1} divise $P = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k.X^k$ et $\deg\left(\pi_{f,x_1}\right) = d$ et $\deg P \leq d-1$. Donc $P = 0$ et par suite $\alpha_0 = ... = \alpha_{d-1} = 0$. CQFD

Q 26 On a pour tout $1 \leq j \leq d-1$, $f(e_j) = e_{j+1} \in E_1$. D'autre part, puisque $\deg \pi_f = d$ et π_f unitaire, alors l'égalité $\pi_f(f)(x_1) = 0_E$, implique $f(e_d) = f^d(x_1) \in vect\left(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1)\right) = E_1$. D'où la stabilité de E_1 par f.

D'autre part, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors E_1 est aussi stable par $P(f)$ et $x_1 \in E_1$. Donc $P(f)(x_1) \in E_1$. D'où l'inclusion :

$\{P(f)(x_1) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\} \subset E_1$. L'autre inclusion est immédiate et donc l'égalité $E_1 = \{P(f)(x_1) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Q 27 Comme $x_1 \in E_1$, alors $\left(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1)\right) = \left(x_1, \Psi_1(x_1), ..., \Psi_1^{d-1}(x_1)\right)$ est une base de E_1 et donc Ψ_1 est cyclique. Remarquons au passage que le polynôme

minimal de Ψ_1 est $\pi_{f,x_1} = \pi_f$.
En effet, Soit $P \in I_{x_1}$, alors $P(f)(x_1) = 0_E$ et si $x \in E_1$, alors d'après Q 26, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $x = Q(f)(x_1)$.
Donc

$$\begin{aligned} P(\Psi_1)(x) &= P(f)(x) \\ &= P(f)(Q(f)(x_1)) \\ &= Q(f)(P(f)(x_1)) \\ &= Q(f)(0_E) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $P(\Psi_1) = 0$, donc $P \in \mathcal{I}_{\Psi_1}$ (idéal annulateur de Ψ_1). Donc $I_{x_1} \subset \mathcal{I}_{\Psi_1}$. Réciproquement, si $P \in \mathcal{I}_{\Psi_1}$, alors $P(\Psi_1) = 0$. Donc $P(\Psi_1)(x_1) = 0$ donc $P(f)(x_1) = 0$ puisque $x_1 \in E_1$ et $\Psi_1 = f/E_1$.Donc $P \in I_{x_1}$. On a donc $\mathcal{I}_{\Psi_1} \subset I_{x_1}$.Donc l'égalité $\mathcal{I}_{\Psi_1} = I_{x_1}$ et par suite $\pi_{\Psi_1} = \pi_{f,x_1}$.D'où $\pi_{\Psi_1} = \pi_f$.

Q 28 Si $x \in F$, alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^i(x)\right) = 0$, donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^{i+1}(x)\right) = 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^i(f(x))\right) = 0$. Donc $f(x) \in F$.

Donc F est stable par f. D'autre part, soit $x \in F \cap E_1$. Donc il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{K}^d$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i.e_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^j(x)\right) = 0$. Montrons alors que $\alpha_1 = ... = \alpha_d = 0$ et que donc $x = 0_E$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que l'un au moins des α_i est non nul et soit k le plus grand de ces ebtiers. Alors $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i.e_i$; et en composant cette égalité par f^{d-k}, on obtient $f^{d-k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i.f^{d-k}(e_i)$. Mais $f^{d-k}(e_i) = e_{d-k+i}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Donc $f^{d-k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i.e_{d-k+i}$
et donc $\Phi\left(f^{d-k}(x)\right) = \alpha_k$. Mais comme $x \in F$, alors $\Phi\left(f^{d-k}(x)\right) = 0$ et donc $\alpha_k = 0$. Ce qui est absurde. Donc $x = 0_E$ et par suite $F \cap E_1 = \{0_E\}$. Donc la somme $F + E_1$ est directe.

Q 29 Soit $x \in E_1 \cap \ker \Psi$, alors $x \in E_1$ et $\forall k \in \{0, ..., d-1\}$, $\Phi\left(f^k(x)\right) = 0$. Mais comme $\deg\left(\pi_f\right) = d$, alors $\left(Id_E, f, ..., f^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ et donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^i \in vect\left(f^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ et donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^i(x) \in vect\left(f^k(x)\right)_{0 \leq k \leq d-1}$.

Et donc par linéarité de Φ, on obtient $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^i(x)\right) = 0$ et donc $x \in F$. (remarquer qu'on a montré au passage que $F = \ker \Psi$) On a donc $x \in E_1 \cap F$ donc d'après Q 28, $x = 0_E$. Par suite Ψ/E_1 est une application linéaire injective, de plus ces espaces de dépert et d'arrivé E_1 et $\mathbb{K}^d$ ont même dimension d. C'est donc un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.

Q 30 Comme Ψ/E_1 est un isomorphisme, alors elle est surjective, donc Ψ est surjective, donc par la formule du rang, $\dim F = \dim(\ker \Psi) = n - d$. Donc $\dim E = \dim F + \dim E_1$. Par ailleur, la somme $E_1 + F$ est directe. D'où $E = E_1 \oplus F$.

Q 31 Raisonnons par récurrence sur $\dim E$.

* Supposons $\dim E = 2$.

- Si $f = \lambda.Id_E$ est une homothètie de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E, alors $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_i = \mathbb{K}.e_i$ ($1 \leq i \leq 2$) et E_i est stable par f et l'endomorphisme Ψ_i de E_i induit par f est cyclique et $P_1 = \pi_{\Psi_1} = P_2 = \pi_{\Psi_2} = X - \lambda$. En particulier P_2 divise P_1.

- Si f n'est pas une homothètie de E, alors il existe $e \in E$ tel que $(e, f(e))$ est une base de E et donc f est cyclique.

* Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vraie dans tout espace vectoriel de dimension $\leq n$ et soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n+1$ et notons $d = \deg \pi_f$. Alors d'après ce qui précède, il existe un sous-espace E_1 de E de dimension d et un sous-espace F stable par f tels que $E = E_1 \oplus F$ et l'endomorphisme Ψ_1 de E_1 induit par f est cyclique.

Alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme f/F de F induit par f, il existent des sous-espaces $E_2, ..., E_r$ de F stables par f/F, donc stables par f tels que $F = E_2 \oplus ... \oplus E_r$ et $\forall 2 \leq i \leq r$, l'endomorphisme $\Psi_i = (f/F)/E_i = f/E_i$ est cyclique et que P_{i+1}divise P_i pour tout $2 \leq i \leq r-1$ et où P_i est le polynôme minimal de Ψ_i.

On a donc $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_r$ et $\forall 1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme f/E_i de E_i induit par f est cyclique et pour tout $2 \leq i \leq r-1$, P_{i+1}divise P_i. Mais $\pi_f = PPCM(P_1, P_2, ..., P_r)$, donc $\pi_f = PPCM(P_1, PPCM(P_2, ..., P_r))$.

Mais $PPCM(P_2, ..., P_r) = P_2$ puisque P_r divise P_{r-1} qui divise.... qui divise P_2. Donc $\pi_f = PPCM(P_1, P_2)$ .D'autre part, on a vu en remarque dans Q 27 que $P_1 = \pi_{f,x_1} = \pi_f$. Donc $P_1 = PPCM(P_1, P_2)$. En particulier P_2 divise P_1.

Q32 En conservant les notations de III.B, et par le III.A, on a $\dim \mathcal{C}(\Psi_i) = \dim E_i$. Donc

$$\dim(\mathcal{C}(\Psi_1) \times ... \times \mathcal{C}(\Psi_r)) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_i$$

ou encore $\dim(\mathcal{C}(\Psi_1) \times ... \times \mathcal{C}(\Psi_r)) = n$ puisque $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$. D'autre part, si on note $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ (g/E_1, ..., g/E_1) \in \mathcal{C}(\Psi_1) \times ... \times \mathcal{C}(\Psi_r)\}$, alors on montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{C}(\Psi_1) \times ... \times \mathcal{C}(\Psi_r)$ donc de dimension n et contenu dans $\mathcal{C}(f)$. D'où $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$.

Q 33 Puisque $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$, alors compte tenu de Q 32, $\dim \mathbb{K}[f] \geq n$. Mais $\dim \mathbb{K}[f] = \deg \pi_f$ et $\deg \pi_f \leq \deg \chi_f = n$ puisque π_f divise χ_f. On a donc $\dim \mathbb{K}[f] = n$ et donc la famille $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ .C'est donc une famille libre. Donc d'après II B, l'endomorphisme f est cyclique.

Q 34 Puisque $f \in 0(E)$, alors son polynôme caracteriqtique s'écrit sous la forme $\chi_f = (X-1)^p (X+1)^q \prod_{j=1}^{k} \left(X^2 - 2\cos\theta_j.X + 1\right)$ et si $f' \in O(E)$ tel que $\chi_{f'} = \chi_f = (X-1)^p (X+1)^q \prod_{j=1}^{k} \left(X^2 - 2\cos\theta_j.X + 1\right)$. Alors d'après le théorème de réduction des automorphismes orthogonaux, ils existent des bases orthonormés $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f') = dig\left(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_k}\right)$ où p, q, r sont des entiers naturels tels que $p + q + 2k = n$ et

$$R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$$

Q 35 Supposons f orthocyclique. Donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ orthonormé de

E telle que la matrice f dans cette base est de la forme $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{p-1} \end{pmatrix}$.

En particulier cette matrice est une matrice orthogonale, donc ses colonnes $(C_1, ..., C_n)$ forment une base orthonormé de $\mathbb{R}^n$. Donc $\forall 1 \leq j \leq n-1$, $\langle C_n, C_j \rangle = 0$, donc $\forall 1 \leq j \leq n-1, a_j = 0$ et C_n est unitaire, donc $a_0 = 1$ ou $a_0 = -1$. Donc $Q = X^n - 1$ ou $Q = X^n + 1$. Mais $\chi_f = \chi_{C_Q} = Q$.

Donc $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

Réciproquement, supposons par exemple $\chi_f = X^n + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Et comme $f \in O(E)$ alors il existe une base ON $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $A = diag\left(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_k}\right)$.

D'autre part, si on pose $Q = X^n + \varepsilon$, alors les colonnes de C_Q forment une base orthonormé de $\mathbb{R}^n$. Donc C_Q est une matrice orthogonale et est orthogonalement semblable à A. Donc s'écrit $C_Q = P^{-1}.A.P$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.

On a donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = P.C_Q.P^{-1}$. Donc d'après les formules de changement de bases, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = C_Q$ où B' est la base orthonormée de E telle que $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donc f est orthocyclique.

Q 36 Comme f est nilpotent, donc trigonalisable de spectre réduit au singleton $\{0\}$. Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = T$ triangulaire superieur stricte à coefficients diagonaux tous nuls. Et soit B' la base orthonormé de E' déduite de B par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, alors la matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire superieur (à coefficients diagonales strictement positifs), ainsi que son inverse, donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f).(\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1}$ est produit de matrices triangulaires superieurs donc triangulaire superieur.

Et si on note $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$, alors $\mathcal{B}'' = (e'_n, ..., e'_1)$ est une base ON de E et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}''}(f)$ est triangulaire inferieur même stricte, puisque f nilpotent.

Q 37 Supposons f orthocyclique, alors, il existe une base ON $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

En particulier, $\chi_f = \chi_{C_Q}$. Mais comme f est nilpotent, alors $\chi_f = X^n$, d'autre part, $\chi_{C_Q} = Q$. Donc $Q = X^n$ et par suite $\alpha_0 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. Donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) =$

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Et comme cette matrice est de rang $n-1$, alors f est de rang $n-1$ et de plus $\ker f = \mathbb{R}.e_n$. Donc $(\ker f)^{\perp} = vec(e_1, ..., e_{n-1})$ puisque $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base ON de E.

D'autre part, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i; e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j.e_j$ sont dans $(\ker f)^{\perp}$, alors par bilinéarité du produit scalaire,

$$(f(x)/f(y)) = \sum_{1\leq i,j\leq n-1} x_i.y_j.\left(f(e_i)/f(e_j)\right)$$

Mais $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $f(e_k) = e_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned}(f(x)/f(y)) &= \sum_{1\leq i,j\leq n-1} x_i.y_j.\left(e_{i+1}/e_{j+1}\right) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n-1} x_i.y_j.\delta_{i+1,j+1} \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n-1} x_i.y_j.\delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i.y_i \\ &= (x/y)\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $rg(f) = n-1$ et $\forall x, y \in (\ker f)^{\perp}$, $(f(x)/f(y)) = (x/y)$. D'après Q 36, il existe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base ON de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire inférieur stricte de la forme

$$\begin{matrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{1,1} & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n-1,1} & \cdots & t_{n-1,n-1} & 0 \end{matrix}$$

Et notons $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n-1,1} & \cdots & \cdots & t_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ la matrice précédente privé de sa première ligne et sa dernière colonne.

Alors on en particulier $\ker f = \mathbb{R}.e_n$ et $(\ker f)^{\perp} = vec(e_1, ..., e_{n-1})$. Mais comme $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base ON de E, et $\forall i, j \in \{1, ..., n-1\}$, $\left(f(e_i)/f(e_j)\right) = \left(e_i/e_j\right)$, alors les colonnes de

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{1,1} & \ddots & . & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n-1,1} & \cdots & t_{n-1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base ON de $\mathbb{R}^n$. Donc les colonnes de sa sous-matrice T forment aussi une base ON de $\mathbb{R}^{n-1}$. Donc T est une matrice orthogonale et comme elle est triangulaire, alors elle est diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale. supposons par exemple T de la forme $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \ddots & . & . & . & . \\ . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & \ddots & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on et vérifie que $\mathcal{B}' = \left(e_1, ..., (-1)^{i-1}.e_i, ..., (-1)^p.e_{p+1}, (-1)^p.e_{p+2}, ..., (-1)^p.e_n\right)$ est une base ON et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice compagnon du polynôme X^n.

D'où f est orthocyclique.

■