

Partie I : Résultats préliminaires

1. Dans le théorème de convergence normale on suppose seulement f continue par morceaux.

a) C'est le théorème de Dirichlet de convergence simple :

· f est continue par morceaux et 2π -périodique

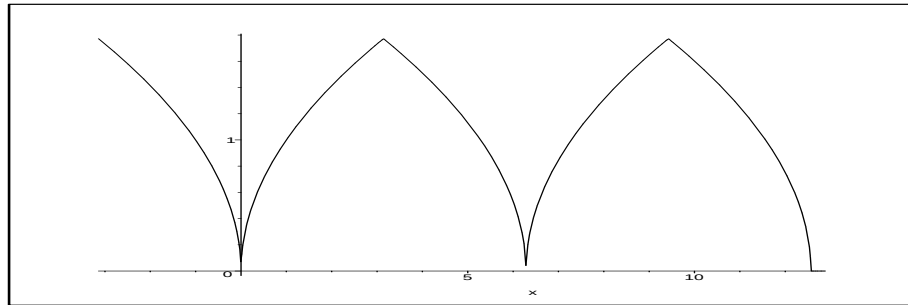
· f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

Alors $(S_p(f))_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

b) La convergence ne peut-être uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in [0, \pi[\end{cases}$ et f 2π -périodique

2. Représentation graphique de φ :



φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 par morceaux car $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = +\infty$

3. théorème de Cesaro :

On suppose que la suite complexe (u_n) converge vers ℓ

a) $\begin{cases} u_n - \ell = o(1) \\ \text{la serie } \sum_{n \geq 0} 1 \text{ diverge} \end{cases}$ implique $\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o(\sum_{k=0}^n 1) = o(n+1)$ (cours)

b) Par ce qui précède $\frac{\sum_{k=0}^n (u_k - \ell)}{n+1} = o(1)$. Mais $\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = \sum_{k=0}^n u_k - (n+1)\ell$, donc

$$\frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n+1} - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

4. On pose $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + \dots + S_n(f))$,

On suppose que $(S_n(f))_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Posons alors $g(x) = \lim_n S_n(f)(x)$ pour tout x

Par le théorème de Fejer, $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Cesaro $(\sigma_n)_n$ converge simplement vers g .

Donc $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

5. $(u_n)_n$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = 0$. notons par $d_n = \sup\{u_k / k \geq n\}$, on a alors : $\forall k \geq n, 0 \leq u_k \leq d_n$, en particulier $0 \leq u_n \leq d_n$.

D'autre part : $\{u_k / k \geq n+1\} \subset \{u_k / k \geq n\}$ et par passage à la borne sup, on a : $d_n \geq d_{n+1}$. Donc la suite $(d_n)_n$ est bien décroissante.

Vérifions que $(d_n)_n$ converge vers 0 pour conclure.

On a déjà (d_n) est décroissante et positive, donc converge vers un réel $d \geq 0$.

Par définition de d , pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ application strictement croissante telle que : $\forall n, d \leq u_{\varphi(n)} \leq d + \frac{1}{n+1}$. Et comme $u_n \rightarrow 0$, il en résulte que $u_{\varphi(n)} \rightarrow 0$ et puis $d = 0$ par unicité de la limite.

Partie II : Exemple de série de Fourier divergente en un point.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que : $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin \left[(2^{n^3} + 1) \frac{x}{2} \right]$

6. Pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (indépendamment de x), donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

7. $I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(pt) \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) dt$, et $T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k}$

a) Calcul de $I_{p,k}$

$$\begin{aligned} I_{p,k} &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \left[\sin\left(p + \frac{2k+1}{2}\right)t + \sin\left(p - \frac{2k+1}{2}\right)t \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{p + \frac{2k+1}{2}} \cos\left(p + \frac{2k+1}{2}\right)t \right]_0^\pi - \left[\frac{1}{p - \frac{2k+1}{2}} \cos\left(p - \frac{2k+1}{2}\right)t \right]_0^\pi \right) \quad (p \neq \frac{2k+1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \frac{2k+1}{2}} + \frac{1}{p + \frac{2k+1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2p - 2k - 1} + \frac{1}{2p + 2k + 1} \end{aligned}$$

b) $T_{p,k}$ en fonction des u_j :

$$\begin{aligned} T_{p,k} &= \sum_{p=0}^q I_{p,k} = \sum_{p=0}^q \left(\frac{1}{2p - 2k - 1} + \frac{1}{2p + 2k + 1} \right) \\ &= \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k-p)+1} + \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k+p)+1} \\ &= \sum_{j=k}^{k-q} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=k}^{k+q} \frac{1}{2j+1} \\ &= \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

Le réel c_k recherché est donc $c_k = \frac{1}{2k+1}$ qui est positif. Comme la quantité $\sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$ est positif car $0 \leq |k-q| \leq k+q$, il en résulte que $T_{q,k}$ est aussi positif ou nul.

c) Question classique :

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k} > 0 \\ \sum \frac{1}{2k} \text{ diverge} \end{array} \right.$, donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2} \ln(N)$$

d) Equivalent de $T_{k,k}$:

On a : $T_{k,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim \frac{1}{2k} \ln(2k) \sim \frac{1}{2} \ln k$ car $\lim \ln(k) = +\infty$ et $\frac{1}{2} \ln(2)$ est constant.

8. f étant paire, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_p(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(pt) dt$.

Mais $f(t) = \sum_{n=1}^\infty f_n(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \sin(2^{n^3} + 1) \frac{t}{2}$ pour tout $t \in [0, \pi]$ et que la convergence

de la série est uniforme sur $[0, \pi]$, donc :

$$\begin{aligned}
 a_p(f) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos(pt) \sin(2^{n^3} + 1) \frac{t}{2} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(pt) \sin(2^{n^3} + 1) \frac{t}{2} dt}_{I_{p, 2^{n^3}-1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n^2} I_{p, 2^{n^3}-1}, \quad k = 2^{n^3}-1 \text{ de sorte que } 2k = 2^{n^3}
 \end{aligned}$$

9. Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 S_{2^{p^3}-1}(f)(0) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{p^3}-1} a_k(f) \cos(k \cdot 0) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{p^3}-1} a_k(f) \\
 &= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2^{p^3}-1} a_k(f) \\
 &= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2^{p^3}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n^2} I_{k, 2^{n^3}-1} \\
 &= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n^2} \sum_{k=0}^{2^{p^3}-1} I_{k, 2^{n^3}-1} \\
 &= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n^2} T_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1} \\
 &\geq \underbrace{-\frac{a_0}{2}(f) + \frac{2}{\pi \cdot p^2} T_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1}}_{=w_p}
 \end{aligned}$$

On sait que $T_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1} \sim \frac{1}{2} \ln(2^{p^3-1}) = \frac{1}{2} (p^3 - 1) \ln(2) \sim \frac{1}{2} p^3 \ln(2)$, donc $w_p \sim \frac{p}{\pi} \ln(2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ et par suite $\sum_{p \geq 1} S_{2^{p^3}-1}(f)(0)$ diverge.

Partie III : Fonctions à variations bornées, théorème de Jordan

Pour $a < b$ deux réels, on pose $S[a, b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0, 1]$.

La fonction f est continue sur $]0, 1]$ par opérations. L'application $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2x})$ est bornée sur $]0, 1]$, donc $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \cos(\frac{\pi}{2x}) = 0 = f(0)$ et suite f est continue en 0. En conclusion f est continue sur $[0, 1]$.

Montrons que f n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.

Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1} \in S_{[0,1]}$ telle que : $\begin{cases} x_0 = 0, & x_{n+1} = 1 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, & x_k = \frac{1}{2(n+1-k)} \end{cases}$

Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \frac{1}{2(n-k)} \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{2(n-k)}}\right) - \frac{1}{2(n+1-k)} \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{2(n+1-k)}}\right) = \cos((n-k)\pi) - \cos((n+1-k)\pi) = (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)} \right), \text{ donc } |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)} \right)$$

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ et par suite } V(\sigma, f) \geq \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \text{ donc } f \text{ n'est pas à variation bornée sur } [0, 1].$$

11. Exemples généraux :

- a) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application monotone.

Lemme : f est à variation bornée ssi $-f$ est à variation bornée

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, f est à variation bornée ssi λf est à variation bornée.

La preuve du lemme est évidente.

Quitte à changer f en $-f$, supposons f est croissante sur $[a, b]$ et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S_{[a, b]}$, alors : $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

et $V(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$ pour tout $\sigma \in S_{[a, b]}$.

D'où f est à variation bornée sur $[a, b]$ et $V([a, b], f) = f(b) - f(a)$.

En conclusion :

si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est à variation bornée et $V([a, b], f) = |f(b) - f(a)|$

- b) Supposons $f = g + h$ avec g et h monotones sur $[a, b]$ et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S_{[a, b]}$, alors :

$$V(\sigma, f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{k+1}) - h(x_k)| = |g(b) - g(a)| + |h(b) - h(a)|.$$

Donc f est à variation bornée sur $[a, b]$ et $V([a, b], f) \leq V([a, b], g) + V([a, b], h)$.

- c) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S_{[a, b]}$, alors $V(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq M(b - a)$

grâce à l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[x_k, x_{k+1}]$ avec $M = \max(\sup_{x \in [a, b]} |f'_d(x)|, \sup_{x \in [a, b]} |f'_g(x)|)$ où $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ désignent resp. les dérivées à droite et à gauche de f au point x .

12. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application à variation bornée, $c \in]a, b[$

Soient $\sigma_1 \in S_{[a, c]}$, $\sigma_2 \in S_{[c, b]}$ et $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$ subdivision de $[a, b]$ obtenue par juxtaposition des deux subdivisions, alors $V(\sigma_1, f) \leq V(\sigma, f) \leq V([a, b], f)$ et $V(\sigma_2, f) \leq V(\sigma, f) \leq V([a, b], f)$, donc $f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$ sont à variations bornées.

On a aussi : $V([a, b], f) \geq V(\sigma, f) = V(\sigma_1, f) + V(\sigma_2, f)$ pour tous σ_1 et σ_2 . On passe à la borne sup. sur les $\sigma_1 \in S_{[a, c]}$ pour avoir : $V([a, b], f) \geq V([a, c], f) + V(\sigma_2, f)$ et puis à la borne sup. sur les σ_2 pour obtenir :

$$V([a, b], f) \geq V([a, c], f) + V([c, b], f)$$

13. Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N} \in S_{[0, 2\pi]}$ telle que $x_k = \frac{2k\pi}{|n|N}$.

Pour $k \in \{1, \dots, |n|N\}$, $V_k(f) = V([x_{k-1}, x_k], f)$.

- a) Pour $t \in [x_{k-1}, x_k]$, on utilisera la subdivision $x_{k-1} \leq t \leq x_k$ de $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} V_k(f) dt = \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}), \text{ donc :}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1})$$

- b) $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt \right|$. Or $\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt = -\frac{1}{in} (e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}})$,

donc : $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| = \frac{1}{|n|} \left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) (e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}}) \right|$, Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) (e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}}) &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) e^{-inx_k} - \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) e^{-inx_{k-1}} \\
&= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1}) e^{-inx_k} \\
&= \sum_{k=0}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-inx_k} + \underbrace{f(2\pi) e^{-i2n\pi} - f(0) e^{-inx_0}}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-inx_k}
\end{aligned}$$

donc $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) (e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}}) \right| \leq \sum_{k=0}^{|n|N-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| = V([0, 2\pi], f)$ et par suite :

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$$

c) Par la question a) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) e^{-int} dt \right| - \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}
2\pi |c_n(f)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f).
\end{aligned}$$

Or : $\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{2\pi}{|n|} \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leq \frac{2\pi}{|n|N} V([0, 2\pi], f)$ (voir question 12)

D'où : $2\pi |c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f) + \frac{2\pi}{|n|N} V([0, 2\pi], f) = \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f) \left(1 + \frac{2\pi}{N}\right)$
et que $\frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f) \left(1 + \frac{2\pi}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$ et par suite

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi |n|} V([0, 2\pi], f) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^*$$

14. On pose $S_n = \sum_{j=0}^n u_j$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$ et suppose que $\sigma_n \rightarrow L$ et $\exists A > 0$ tel que $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}$ pour tout k

a) Pour k et n des entiers naturels non nuls, on a :

$$\begin{aligned}
k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L) &= kS_n - (n+k)\sigma_{n+k-1} + n\sigma_{n-1} \\
&= kS_n - \sum_{j=0}^{n+k-1} S_j + \sum_{j=0}^{n-1} S_j \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (S_n - S_{j+n}) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=n+1}^{j+n} u_l
\end{aligned}$$

b) Avec la relation précédente et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
k|S_n - L| &\leq \left| \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=n+1}^{j+n} u_l \right| + |(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L)| + |n(\sigma_{n-1} - L)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=n+1}^{j+n} \frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \text{ car } (d_n) \text{ est décroissante} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} j \frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} = \frac{k(k-1)}{2} \frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$|S_n - L| \leq \frac{(k-1)}{2} \frac{A}{n+2} + (1 + \frac{2n}{k})d_{n-1}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} \leq k^2$, alors :

$$\begin{aligned}
|S_n - L| &\leq (1 + \frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{(k-1)}{2} \frac{A}{n+2} \\
&\leq d_{n-1} + \frac{2n}{k}d_{n-1} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\
&\leq d_{n-1} + \frac{2n}{2n}\sqrt{d_{n-1}} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\
&\leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}} \text{ car } \frac{2n}{2(n+2)} < 1
\end{aligned}$$

Comme (d_n) est décroissante et tend vers 0, la suite $(S_n)_n$ converge vers L .

15. Par le théorème de Fejer $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $(d_n)_n$ une suite de réels positifs telle que (d_n) est décroissante et tend vers 0 (appliquer le résultat de la question 5) à la suite $\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma_n(t) - f(t)| \right)_n$ et que $|\sigma_n(t) - f(t)| \leq d_n$ pour tout t .

Posons $\begin{cases} u_0(t) = c_0(f) \\ u_n(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $S_n(f)(t) = \sum_{j=0}^n u_j(t)$.

On a alors :

$$|u_n(t)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \leq \frac{V([0, 2\pi], f)}{n\pi} = \frac{n+1}{n} \frac{V([0, 2\pi], f)}{(n+1)\pi} \leq 2 \frac{V([0, 2\pi], f)}{(n+1)\pi} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

(voir question 13.c) et que $|u_0(t)| = |c_0(f)|$

Donc : $|u_n(t)| \leq \frac{1}{n+1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \max(|c_0(f)|, 2 \frac{V([0, 2\pi], f)}{\pi})$.

Par la question 14), pour tout réel t on a : $|S_n(f)(t) - f(t)| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ et par suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16. φ étant continue et 2π -périodique. En écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0[\\ \sqrt{t} & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$ et

$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{-t} & \text{si } t \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$, on a alors φ est à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$ car φ est somme de deux fonctions monotones.

Par la question 15), la série de Fourier de φ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.

17. Application :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ application 2π -périodique et α -lipschitzienne, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus si $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S_{[-\pi, \pi]}$, alors $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \alpha |x_{k+1} - x_k| = \alpha (x_{k+1} - x_k)$

et par suite : $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \alpha 2\pi$. Donc f est à variation bornée et d'après ce qui précède : (question 15) la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.