Concours Mines-Ponts 2008
Filière PSI
Première composition de mathématiques

25 avril 2008

1 Préliminaires

1. On observe avant toute chose que pour tout $i \in [\![0 ; n]\!]$, le polynôme L_i est de degré n (produit de n monômes) et vérifie

$$\forall j \in [\![0 ; n]\!] \qquad L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq i \\ 1 & \text{si} \quad j = i \end{cases}$$

On se donne des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$. Pour tout $j \in [\![0 ; n]\!]$, on peut évaluer cette relation en a_j pour obtenir :

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$$

Ainsi, $$\forall j \in [\![0 ; n]\!] \qquad \lambda_j = 0$$

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc libre dans $\mathbb{C}_n[X]$. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$, c'est une base de cet espace vectoriel.

$$\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

2. Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, il admet une décomposition (unique) dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$: il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$

Pour tout $j \in [\![0 ; n]\!]$, on évalue cette relation en a_j pour trouver

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$$

Par suite, $$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i$$

et les coordonnées de P dans la base $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ sont $\begin{bmatrix} \mathrm{P}(a_0) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(a_n) \end{bmatrix}$.

En particulier, si $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, les coordonnées dans cette base de X^k sont $\begin{bmatrix} a_0^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{bmatrix}$.

$$\boxed{\text{La matrice de la famille } (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n) \text{ dans la base } (\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n) \text{ est } \begin{bmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}}.$$

2 Fonctions polynomiales

3. On calcule les images des vecteurs de base par ces applications. Si $j \in [\![0\,;\, k]\!]$,

$$t_a(e_j) = (\mathrm{X} + a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} \mathrm{X}^i$$

et $$d(e_j) = d(\mathrm{X}^j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = 0 \\ j\mathrm{X}^{j-1} & \text{si} \quad j \neq 0 \end{cases}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{T}_a = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} a & \cdots & \binom{k}{0} a^k \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{k}{0} a^{k-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{k}{k} \end{bmatrix}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}$$

4. On sait que dans une matrice (carrée) triangulaire, les valeurs propres se lisent simplement sur la diagonale. Et les valeurs propres d'un endomorphisme sont les valeurs propres de n'importe quelle matrice qui le représente.

Chaque coefficient de la diagonale de T_a vaut 1 donc

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } t_a.}$$

De même, $$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } d.}$$

Il saute aux yeux que D est de rang k donc d est également de rang k. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} d = k+1-k = 1$. Et on sait que le polynôme constant 1 se trouve dans $\operatorname{Ker} d$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} d = \operatorname{Vect}(1) \text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$$

De même, il saute aux yeux que $T_a - I_{k+1}$ est de rang k, qui est donc aussi le rang de $t_a - \mathrm{id}$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(t_a - \mathrm{id}) = 1$. Enfin, on a $t_a(1) = 1$ donc le polynôme constant 1 se trouve dans $\operatorname{Ker}(t_a - \mathrm{id})$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(t_a - \mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(1) \text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$$

5. On commence par remarque que tous les $\mathbb{R}_p[X]$, pour $p \in [\![0\,;k]\!]$ sont stables par d, puisque la dérivation abaisse le degré. Trivialement, $\{0\}$ est aussi stable par d.

Soit F un sous-espace de E, stable par d. Évidemment, on écarte le cas trivial où $F = \{0\}$. En suivant l'indication de l'énoncé, on se donne $P \in F$, de degré maximal noté p. Ceci signifie que tout élément de F est de degré inférieur à p, donc $F \subset \mathbb{R}_p[X]$.

Les polynômes $P, d(P), d^2(P), \dots, d^p(P)$ se trouvent dans F, puisque ce dernier est stable par d. La dérivation fait baisser le degré d'une unité donc $d^j(P)$ est de degré $p-j$ pour $j \in [\![0\,;p]\!]$. La famille $(P, d(P), \dots, d^p(P))$ est alors libre car formée de polynômes non nuls de degrés étagés. Elle engendre donc un sous-espace de dimension $p+1$ de $\mathbb{R}_p[X]$, qui est lui-même de dimension $p+1$. Donc

$$\operatorname{Vect}(P, d(P), \dots, d^p(P)) = \mathbb{R}_p[X] \subset F$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les sous-espaces de E, stables par } d\text{, sont } \{0\}, \mathbb{R}_0[X], \dots, \mathbb{R}_k[X].}$

6. Pour les mêmes raisons que précédemment, le système $\big(P, d(P)/1!, \dots, d^k(P)/k!\big)$ est libre : il s'agit d'une famille, étagée en degrés, de polynômes non nuls. Comme elle comporte $k+1$ vecteurs de E, qui est de dimension $k+1$, c'en est une base.

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(P, \frac{d(P)}{1!}, \dots, \frac{d^k(P)}{k!}\right) \text{ est une base de E.}}$$

Pour trouver la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}_1$, il suffit de décomposer les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ dans la base canonique. On rappelle la formule

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \qquad d^j(X^i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!} X^{i-j} & \text{si} \quad j \leqslant i \\ 0 & \text{si} \quad j > i \end{cases}$$

Par suite, $\qquad \forall j \in [\![0\,;k]\!]$

$$\begin{aligned} \frac{d^j(P)}{j!} &= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{k} p_i\, d^j(X^i) \\ &= \sum_{i=j}^{k} \frac{i!}{j!(i-j)!} p_i X^{i-j} = \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(i+j)!}{j!\,i!} p_{i+j} X^i \\ \frac{d^j(P)}{j!} &= \sum_{i=0}^{k-j} \binom{i+j}{j} p_{i+j} X^i \end{aligned}$$

L'avant-dernière étape résulte d'un changement d'indice $i \leftarrow i - j$. Ces calculs fournissent la matrice de passage recherchée :

$$\boxed{\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} p_0 & \cdots & \binom{k-1}{k-1} p_{k-1} & \binom{k}{k} p_k \\ \binom{1}{0} p_1 & \cdots & \binom{k}{k-1} p_k & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \binom{k}{0} p_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}$$

7. On peut s'en sortir avec la formule de Taylor, qui est une égalité quand appliquée, à l'ordre k, à un polynôme de degré k. On rappelle que

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E} \quad \forall x, h \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Q}(x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{Q}^{(j)}(x)}{j!} h^j$$

Fixons Q et h ; la relation précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$; et puisqu'on peut assimiler fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ et polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{C}$, il s'ensuit que

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E} \quad \forall h \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{X}+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{Q}^{(j)}}{j!} h^j$$

En particulier, $\quad \forall i \in [\![0\,;k]\!] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}+ia) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{P}^{(j)}}{j!} (ia)^j = \sum_{j=0}^{k} (ia)^j \frac{d^j(\mathrm{P})}{j!}$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } \mathrm{P}(\mathrm{X}+ia) \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ sont } \begin{bmatrix} 1 \\ ia \\ \vdots \\ (ia)^k \end{bmatrix}.}$$

D'où l'on déduit $\qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & ka \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^k & \cdots & (ka)^k \end{bmatrix}$

On reconnaît la transposée de la matrice de passage trouvée à la question **2**, avec $a_i = ia$ pour tout i. Une matrice de passage est inversible donc U est inversible. Mais U est la matrice de la famille S dans $\mathscr{B}_1$. Par suite,

$$\boxed{\text{S est une base de E.}}$$

8. R est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}_1$ et U est la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$. Par suite,

$$\boxed{\text{La matrice de passage Q de } \mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}_2 \text{ est RU.}}$$

9. On procède de la même manière qu'à la question **5**. On commence par observer que tous les $\mathbb{R}_p[X]$, pour $p \leqslant k$, sont stables par t_a. Il s'agit de montrer que ce sont les seuls, avec bien sûr le sous-espace trivial $\{0\}$.

Soit F un sous-espace de E, stable par t_a. On suppose évidemment $F \neq \{0\}$, de sorte qu'on puisse prendre, parmi les éléments de F, un polynôme P de degré maximal qu'on note p. Tous les éléments de F sont donc de degré inférieur à p donc $F \subset \mathbb{R}_p[X]$ et $\dim F \leqslant p+1$.

Puisque F est stable par t_a, les polynômes $P, P(X+a), \dots, P(X+pa)$ sont dans F. Mais ils forment une famille libre de F d'après la question **7** et F est de dimension au moins $p+1$.

Au final, F a la même dimension que $\mathbb{R}_p[X]$, dans lequel il est inclus. Donc $F = \mathbb{R}_p[X]$.

$$\boxed{\text{Les sous-espace de E, stables par } t_a\text{, sont } \{0\}, \mathbb{R}_0[X], \dots, \mathbb{R}_k[X].}$$

3 Fonctions continues, 2π-périodiques

10. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\phi_a \text{ non injective} &\iff \exists n, m \in \mathbb{Z} \quad n \neq m \qquad e^{ina} = e^{ima} \\
&\iff \exists n, m \in \mathbb{Z} \quad n \neq m \qquad e^{i(n-m)a} = 1 \\
&\iff \exists q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad e^{iqa} = 1 \\
&\iff \exists q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad qa = 0 \ [2\pi] \\
\phi_a \text{ non injective} &\iff \exists q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad a = 0 \ \left[\frac{2\pi}{q}\right]
\end{aligned}$$

Par suite, $\boxed{\phi_a \text{ est injective si, et seulement si, } a \text{ n'est pas un multiple rationnel de } 2\pi.}$

Supposons ϕ_a non injective. Il existe alors des entiers relatifs p et q, avec $q \neq 0$, tels que $a = 2p\pi/q$. De sorte que qa est un multiple entier de 2π. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \phi_a(n+q) = \exp(i(n+q)a) = \exp(ina) \underbrace{\exp(iqa)}_{=1} = \phi_a(n)$$

et ϕ_a est q-périodique.

$$\boxed{\text{Si } a \text{ est un multiple rationnel de } 2\pi\text{, la fonction } \phi_a \text{ est périodique.}}$$

11. Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé. On a

$$c_n(t_a(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+a)\, e^{-inx}\, dx$$

On procède au changement de variable $u \leftarrow x + a$:

$$c_n(t_a(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(u-a)}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}}{2\pi}\int_a^{2\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u$$

Mais $u \longmapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}$ est 2π-périodique donc son intégrale est la même sur tout intervalle de longueur 2π. D'où

$$c_n(t_a(f)) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}c_n(f)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(t_a(f)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}\,c_n(f)}$$

12. Soit λ une valeur propre de t_a, soit f un vecteur propre (donc non nul) associé à λ. De sorte que $t_a(f) = \lambda f$. Comme f n'est pas la fonction nulle, elle a au moins un coefficient de Fourier non nul : il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n(f) \neq 0$.

D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}c_n(f) = c_n(t_a(f)) = c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f)$$

On peut diviser par $c_n(f)$, ce qui fournit $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na} = \phi_a(n)$: les valeurs propres de t_a se trouvent dans l'ensemble $\phi_a(\mathbb{Z})$.

Réciproquement, soit $n \in \mathbb{Z}$; on pose $\lambda = \phi_a(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}$ et on montre que λ est valeur propre de t_a. Il suffit de remarquer que $\mathrm{e}_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est vecteur propre associé à λ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad t_a(\mathrm{e}_n)(x) = \mathrm{e}_n(x+a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x+a)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \lambda \mathrm{e}_n(x)$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } t_a \text{ est } \phi_a(\mathbb{Z}).}$$

Étudions plus en détail le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres de t_a. Soient $\phi_a(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, l'une d'elle et f un vecteur propre associé. Alors

$$\forall m \in \mathbb{Z} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}ma}c_m(f) = c_m(t_a(f)) = c_m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}f) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}c_m(f)$$

donc
$$\forall m \in \mathbb{Z} \qquad (\phi_a(m) - \phi_a(n))c_m(f) = 0$$

On voit donc que, si ϕ_a est injective, $\phi_a(m) - \phi_a(n) \neq 0$ si $m \neq n$. Ainsi, seul $c_n(f)$ a le droit d'être non nul. Autrement dit, f est proportionnel à e_n. Le sous-espace propre associé à $\phi_a(n)$ est de dimension 1, engendré par e_n.

En revanche, si ϕ_a n'est pas injective, il existe deux entiers m et n, distincts, tels que $\phi_a(m) = \phi_a(n)$. Les fonctions e_n et e_m sont donc vecteurs propres associés à $\phi_a(m) = \phi_a(n)$; ils forment évidemment une famille libre, pour de multiples raisons, l'une d'elle étant qu'ils sont orthogonaux. Donc t_a admet au moins un sous-espace propre de dimension supérieure à 2. En conclusion,

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Les sous-espaces propres de } t_a \text{ sont tous de dimension 1} &\iff \phi_a \text{ est injective}\\ &\iff a \notin 2\pi\mathbb{Q}.\end{aligned}}$$

13. La famille $(f, t_a(f), \dots, t_a^p(f))$ est liée puisqu'elle comporte $p+1$ vecteurs vivant dans F, qui est de dimension p. Donc il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k t_a^k(f) = 0$$

Tous les coefficients de Fourier de cette fonction sont donc nuls. En utilisant le calcul de la question **11**, il vient

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad 0 = c_n\left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k t_a^k(f)\right) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k c_n(t_a^k(f)) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}nka} c_n(f)$$

$$\boxed{\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^{p+1} \setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) \times \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}nka} = 0}$$

14. On suppose que a n'est pas un multiple rationnel de π, ce qui rend ϕ_a injective.

Soit $f \in$ F. D'après la question précédente, il existe des complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_p$, non tous nuls, tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad 0 = c_n(f) \times \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \exp(\mathrm{i}nak) = c_n(f) \times \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (\phi_a(n))^k \tag{1}$$

Cela nous amène à considérer le polynôme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \mathrm{X}^k$. Il est non nul car au moins un de ses coefficients ne l'est pas ; il n'admet alors qu'un nombre fini de racines. Mais l'ensemble $\{\phi_a(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est infini, par injectivité de ϕ_a et P ne peut s'annuler qu'en un nombre fini d'éléments de celui-ci. Donc il existe un entier N_f tel que si $|n| \geqslant \mathrm{N}_f$, $\mathrm{P}(\phi_a(n)) \neq 0$. D'après la relation (**1**),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |n| \geqslant \mathrm{N}_f \Longrightarrow c_n(f) = 0}$$

15. F étant de dimension finie p, il admet une base qu'on note $(f_1, \dots, f_p)$. D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, il existe un entier N_i tel que les coefficients de Fourier $c_n(f_i)$ sont nuls pour $|n| \geqslant \mathrm{N}_i$.

On note N le plus grand des entiers $\mathrm{N}_1, \dots, \mathrm{N}_p$. De sorte que

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad |n| \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow c_n(f_i) = 0$$

Maintenant, si g appartient à F, il est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$. Donc chaque $c_n(g)$ est la combinaison linéaire correspondante de $c_n(f_1), \dots, c_n(f_p)$; et $c_n(g)$ est nul dès que $|n| \geqslant$ N.

$$\boxed{\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad |n| \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow c_n(g) = 0}$$

16. Soit $f \in$ F. On pose $g = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n(f)\mathrm{e}_n$. Alors g a les mêmes coefficients de Fourier que f ; par suite $f = g$ et f se trouve dans G.

Chacun des vecteurs e_k pour $k \in [\![-\mathrm{N}\,;\mathrm{N}]\!]$ est vecteur propre de t_a. Par suite, $t_a(e_k) \in \mathrm{G}$ et le sous-espace G qu'ils engendrent est stable par t_a

$$\boxed{\mathrm{F} \subset \mathrm{G}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\text{G est stable par } t_a.}$$

17. Notons $\tilde{t}_a$ l'endomorphisme de G induit par t_a. Les scalaires $(\phi_a(k))_{-\mathrm{N}\leqslant k\leqslant \mathrm{N}}$ sont distincts, car a n'est pas multiple rationnel de 2π et ϕ_a est injective. Et ce sont des valeurs propres de $\tilde{t}_a$, puisqu'on a vu à la question **12** que

$$\forall k \in [\![-\mathrm{N}\,;\mathrm{N}]\!] \qquad \tilde{t}_a(\mathrm{e}_k) = \phi_a(j)\,\mathrm{e}_k$$

La matrice de $\tilde{t}_a$ dans la base $(\mathrm{e}_{-}\mathrm{N}, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{N})$ est donc diagonale.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit par } t_a \text{ sur G est diagonalisable.}}$$

18. F est stable par t_a et t_a induit un endomorphisme de F. Mais $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ et l'endomorphisme induit par t_a sur G est diagonalisable. Donc l'endomorphisme induit par t_a sur F l'est aussi : il existe une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F formée de vecteurs propres de t_a.

Mais, dans la mesure où a n'est pas un multiple rationnel de 2π et d'après la question **12**, les vecteurs propres de t_a sont précisément les fonction $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Du coup, pour tout $k \in [\![1\,; p]\!]$, il existe $n_k \in \mathbb{Z}$ tel que $f_k = \mathrm{e}_{n_k}$. Notant $\mathrm{S} = \{n_1, \ldots, n_p\}$, on a

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_j, j \in \mathrm{S})}$$