

# Centrale 1990, Math. I

L'espace  $E$  est un espace euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormal direct  $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , d'axes  $Ox, Oy, Oz$ . On appelle  $S$  la sphère de centre  $O$  et de rayon 1,  $C$  le cône engendré par les droites passant par  $O$  et faisant avec  $Oz$  un angle  $\frac{\pi}{6}$ .

On se propose d'étudier des propriétés de l'ensemble des droites tangentes à  $S$  et situées dans un plan tangent à  $C$  (on dira qu'une droite  $D$  est tangente à une surface s'il existe sur  $D$  un point  $M$  qui soit un point régulier de la surface et tel que le plan tangent en  $M$  contienne  $D$ ).

Pour tout couple  $(t, \theta)$  de réels, on pose

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} \\ \vec{v}(t) &= -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \\ \vec{k}_1(t) &= \frac{1}{2} \vec{v}(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \\ A(t, \theta) &= O + \cos \theta \vec{u}(t) + \sin \theta \vec{k}_1(t) \\ \vec{w}(t, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} A(t, \theta) = -\sin \theta \vec{u}(t) + \cos \theta \vec{k}_1(t)\end{aligned}$$

et on désigne par  $D_{t,\theta}$  la droite passant par le point  $A(t, \theta)$  et de vecteur unitaire  $\vec{w}(t, \theta)$ . On note  $(\Delta)$  l'ensemble des droites  $D_{t,\theta}$  où  $(t, \theta)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_1, \vec{w}, A, D$  les objets précédents, en omettant leurs variables  $t$  et  $\theta$ .

## Partie I

1°) Donner une équation cartésienne de  $S$  dans  $R$ ; établir que  $C$  est représenté dans  $R$  par l'équation  $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ . Déterminer l'intersection  $\Gamma$  de ces deux surfaces : nature, éléments remarquables.

2°) Dans cette question  $t$  garde une valeur fixée.

a) Montrer que, lorsque  $\theta$  varie,  $D_{t,\theta}$  reste dans un plan fixe  $\Pi_t$  que l'on définira par un point et deux vecteurs.

b) Soit  $\gamma_t$  le cercle intersection de  $\Pi_t$  et de  $S$ . Préciser son centre, son rayon, son intersection avec  $\Gamma$ . Lorsque  $\theta$  varie, quelle est la courbe décrite par  $A(t, \theta)$ ? Quel est le rôle de  $D_{t,\theta}$  par rapport à  $\gamma_t$ ? Quelle est la signification du paramètre  $\theta$ ?

c) Donner une équation de  $\Pi_t$  dans  $R$ .

3°) a) Montrer que  $\Pi_t$  est tangent à  $C$  le long d'une génératrice de  $C$  que l'on précisera.

b) Montrer qu'inversement tout plan tangent à  $C$  est un plan  $\Pi_t$  pour une valeur convenable de  $t$ .

c) Soient deux réels  $t, t'$ . Quand a-t-on  $\Pi_t = \Pi_{t'}$ ?

d) Une droite  $D$  appartenant à  $(\Delta)$  peut-elle être située dans deux plans tangents à  $C$  distincts?

4°) On fixera ici  $t$  et  $\theta$ .

a) Montrer que  $D_{t,\theta}$  est tangente à  $S$  en  $A$  et que, si  $\theta$  est non nul modulo  $\pi$ , elle est aussi tangente à  $C$  en un point  $B(t, \theta)$  situé sur la droite  $(O, \vec{k}_1)$ , dont on précisera la position.

b) Donner le plan tangent en  $A$  à  $S$  et, si  $B$  existe, le plan tangent en  $B$  à  $C$ . Quel angle font-ils?

5°) Faire un croquis en perspective représentant  $S, C$ , leur intersection  $\Gamma$  et pour un choix de  $t$  et  $\theta$  ( $\theta$  non nul modulo  $\pi$ ), le cercle  $\gamma_t$ , la droite  $D_{t,\theta}$ , les points  $A$  et  $B$ , les droites issues de  $O$  et dirigées respectivement par  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_1$ .

6°) On reprend ici la notation  $(\Delta)$  définie dans le préambule.

a) Montrer que toute droite appartenant à  $(\Delta)$  est tangente à  $S$  et située dans un plan tangent à  $C$ .

b) Montrer qu'inversement toute droite tangente à  $S$  et située dans un plan tangent à  $C$  appartient à  $(\Delta)$ .

## Partie II

1°) Dans cette question, on se propose d'étudier les isométries affines  $f$  de  $E$  qui transforment  $\Gamma = S \cap C$  en elle-même, c'est-à-dire telles que  $f(\Gamma) = \Gamma$ . Ces isométries forment manifestement un sous-groupe  $G$  du groupe des isométries affines de  $E$ , ce que l'on ne demande pas de vérifier.

a) Montrer qu'une isométrie  $f$  appartient à  $G$  si et seulement si elle laisse  $O$  invariant et laisse la droite  $Oz$  globalement invariante.

b) Montrer qu'une isométrie  $f$  appartient à  $G$  si et seulement si  $f(S) = S$  et  $f(C) = C$ .

c) Toute isométrie  $f$  de  $E$  conservant  $O$  est définie dans le repère  $R$  par une matrice  $J_f$  d'ordre (taille) 3. Quelle doit être la forme de  $J_f$  pour que  $f$  appartienne à  $G$ ? Donner pour chacune des matrices  $J_f$  trouvées une définition géométrique de  $f$ .

d) Quelles sont les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des plans) appartenant à  $G$ ? Montrer qu'elles engendrent  $G$ .

2°) Soit  $f$  un élément du groupe  $G$  défini ci-dessus. Établir que si une droite  $d$  appartient à  $(\Delta)$  alors  $f(d)$  appartient aussi à  $(\Delta)$ .

3°) Soient  $t, t', \theta, \theta'$  des réels.

a) À quelle condition a-t-on  $D_{t,\theta} = D_{t',\theta'}$ ?

b) Donner une isométrie de  $E$  qui transforme, pour tout  $t$  et tout  $\theta$ ,  $D_{t,\theta}$  en  $D_{t,\theta+\pi}$ .

c) Établir que l'on passe de  $D_{t,\theta}$  à  $D_{t',\theta}$  par une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.

d) Donner de même une isométrie de  $E$ , ne dépendant que de  $t$  et  $t'$ , qui fasse passer de  $D_{t,\theta}$  à  $D_{t',\pi-\theta}$ . On pourra commencer par le cas  $t' = t$ .

### Partie III

On suppose, dans cette partie, que  $t$  décrit un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Une application  $\psi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  étant donnée, on notera  $\Sigma_\psi$  la surface engendrée par  $D_{t,\psi(t)}$  lorsque  $t$  décrit  $I$ , par  $L_\psi$  et  $\Lambda_\psi$  les courbes décrites par les points  $A$  et  $B$  correspondants.

1°) a) Montrer que  $\Sigma_\psi$  peut être décrite par le paramétrage suivant : à tout  $t$  de  $I$  et à tout  $\rho$  réel on associe le point  $M(t, \rho)$  défini par  $M(t, \rho) = A(t, \psi(t)) + \rho \vec{w}(t, \psi(t))$ .

b)  $t$  étant donné, pour quelle valeur de  $\rho$  obtient-on le point  $B$  (lorsqu'il existe)?

c)  $t$  étant donné, à quelle condition le point  $A$  est-il un point régulier de  $\Sigma_\psi$ ? Montrer qu'alors  $S$  et  $\Sigma_\psi$  sont tangentes en  $A$ .

d)  $t$  étant donné, à quelle condition le point  $B$  est-il un point régulier de  $\Sigma_\psi$ ? Montrer qu'alors  $S$  et  $\Sigma_\psi$  sont tangentes en  $B$ .

2°) On suppose dans cette seule question que  $I = \mathbb{R}$  et que la fonction  $\psi$  est constante :  $\psi(t) = \mu$  pour tout  $t$ . La surface  $\Sigma_\psi$  correspondante sera ici notée  $\Sigma_\mu$ .

a) Établir que  $\Sigma_\mu$  est une surface de révolution d'axe  $Oz$ .

b) Déterminer  $\Sigma_{\pi/2}$  et  $\Sigma_{-\pi/2}$ .

c) Donner l'équation de  $\Sigma_0$  dans le repère  $R$  et préciser sa nature.

d) Quelle est la surface décrite par les droites  $D_{t,\theta}$  telles que le point  $B(t, \theta)$  n'existe pas?

3°) On désigne toujours par  $\psi$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On se propose de déterminer l'ensemble  $\Omega$  des fonctions  $\psi$  vérifiant la propriété suivante : pour tout  $t$  appartenant à  $I$ , le point  $B$  existe et la droite  $D_{t,\psi(t)}$  est tangente en  $B$  à la courbe  $\Lambda_\psi$  décrite par  $B$ .

a) Soit  $\psi$  appartenant à  $\Omega$ . Montrer que, pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $I$  de définition de  $\psi$ , l'on a :  $(2\psi'(t) + 1) \cos \psi(t) = 0$ .

b) On suppose encore que  $\psi$  appartient à  $\Omega$  et que, de plus, il existe  $t_0$  appartenant à  $I$  tel que  $\psi'(t_0) \neq -\frac{1}{2}$ . Établir qu'il existe  $\varepsilon$  strictement positif tel que, pour tout  $t$  vérifiant  $|t - t_0| < \varepsilon$ , l'on ait  $\cos \psi(t) = 0$ . En déduire que  $\psi'(t_0) = 0$ .

c) Démontrer que, pour tout  $\psi$  appartenant à  $\Omega$ ,  $\psi'$  est constante dans  $I$ .

d) Donner toutes les fonctions  $\psi$  appartenant à  $\Omega$ .

4°) a) Établir que l'application  $\psi_0$  qui à tout  $t$  appartenant à  $]0, 2\pi[$  associe  $-\frac{t}{2}$  est un élément de  $\Omega$ .

b) Montrer que, si l'on excepte certains cas singuliers (indiquer ce qu'est alors la surface  $\Sigma_\psi$ ), toute surface  $\Sigma_\psi$  telle que  $\psi$  soit élément de  $\Omega$  se déduit de la surface  $\Sigma_{\psi_0}$  ou d'une partie de cette surface par une isométrie que l'on précisera.

**Dans toute la suite de la partie III, on étudie la surface  $\Sigma_{\psi_0}$  qu'on vient de définir. Au lieu de  $\Sigma_{\psi_0}$ ,  $D_{t,\psi_0(t)}$ ,  $A(t, \psi_0(t))$ ,  $B(t, \psi_0(t))$ ,  $\vec{w}(t, \psi_0(t))$ , on notera  $\Sigma$ ,  $D_t$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\vec{w}(t)$  ; les courbes décrites par  $A(t)$  et  $B(t)$  seront notées  $L$  et  $\Lambda$ .**

5°) a) Donner les coordonnées cartésiennes de  $A(t)$  dans le repère  $R_t = (O, \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{k})$  et dans le repère  $R$ .

b) Établir que lorsque  $A(t)$  est un point régulier de  $L$ , la tangente à  $L$  en ce point est orthogonale à  $\Pi_t$ . Que dire de l'angle de cette droite avec  $Oz$ ?

c) Montrer que  $L$  a un point non régulier unique ; le donner ainsi que sa tangente.

d) Tracer sommairement les projections de  $L$ ,  $S$  et  $S \cap C$  sur les trois plans de coordonnées de  $R$  ; faire un croquis perspectif représentant  $S$ ,  $L$  et  $S \cap C$ .

e) Soit  $t$  tel que  $A(t)$  soit un point régulier de  $L$ . Déterminer le vecteur unitaire  $\vec{N}_t$  de la normale principale et le rayon de courbure  $R_t$  de  $L$  en  $A(t)$ . Donner une construction du centre de courbure de  $L$  en  $A(t)$ , c'est-à-dire du point  $A(t) + R_t \vec{N}_t$ , à partir de  $O$ ,  $A(t)$  et  $B(t)$ .