Première partie

1. (a) • $dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) \times dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 4 \times 2 = 8$.

   • Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$, alors $Tr(A) = 0$ et $A + \overline{A} = 0$, ce qui entraine que $\begin{cases} a + \overline{a} = 0 \\ c + \overline{b} = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$, ce qui conduit à $(a, c, d) = (\alpha i, -\overline{b}, -\alpha i)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $A = \begin{pmatrix} \alpha i & -\overline{b} \\ b & -\alpha i \end{pmatrix}$ et en posant $b = \beta + i\gamma$, on aura $A = \alpha E + \beta F + \gamma G$ et par suite $\mathcal{L}$ est engendré par (E, F, G).
   Réciproquement $(E, F, G$ est libre, donc $\mathcal{L} = Vect(E, F, G)$.

   (b) Un calcul simple amène à $[E, F] = -2G$, $[F, G] = -2E$, $[G, E] = -2F$.

2. (a) La norme $|||.|||$ est multiplicative, donc pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, $|||\frac{A^k}{k!}||| \leq \frac{|||A||||^k}{k!}$, donc par comparaison la série $\sum |||\frac{A^k}{k!}|||$ converge.

   (b) Une récurrence simple conduit à $\forall k \in \mathbb{N}, A \in M_n(\mathbb{C}), P \in GL_n(\mathbb{C})$, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$, donc $exp(P^{-1}AP) = P^{-1}exp(A)P$.

   (c) Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$, l'ensemble des matrices triangulaires est une $\mathbb{C}-$algèbre, donc
   $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et par suite $exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \triangleleft \\ & \ddots & \\ O & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

   (d) Soit $A \in \mathbb{C}$, alors A est trigonalisable, donc P inversible, T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$, tels que $A = PTP^{-1}$, donc $exp(A) = Pexp(T)P^{-1}$ et par suite
   $Tr(exp(A)) = Tr(exp(T)) = e^{\lambda_1}...e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+...+\lambda_n} = exp(Tr(T)) = exp(Tr(A))$.

Deuxième partie

3. • ${}^tI_2\overline{I_2} = {}^tI_2I_2 = I_2$.
   $\forall A, B \in U(2, \mathbb{C})$, ${}^t(AB)\overline{AB} = {}^tB^A\overline{AB} = {}^tB\overline{B} = I_2$.
   $\forall A \in U(2, \mathbb{C})$, ${}^t(A^{-1)}\overline{A^{-1}} = ({}^tA)^{-1}\overline{A}^{-1} = (\overline{A}{}^tA)^{-1} = I_2$.
   Donc $U(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
   • L'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & U_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & M & \longmapsto & det(M) \end{array}$ est un morphisme de groupes, donc $Ker(\varphi) = SU(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $U(2, \mathbb{C})$.

4. • Les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$, sont des éléments de $SU(2, \mathbb{C})$.
   • Réciproquement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, alors ${}^tA\overline{A} = I_2$ et $det(A) = 1$, ce qui donne le système de Cramer d'inconnues $\overline{b}, \overline{d}$ à savoir $\begin{cases} b\overline{b} + d\overline{d} = 1 \\ a\overline{b} + c\overline{d} = 0 \end{cases}$
   de discriminant $\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = bc - ad = -1$, donc $\overline{b} = -\begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & c \end{vmatrix} = -c$ et $\overline{d} = -\begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = a$
   D'où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.

5. (a) Soit λ une valeur propre de $M \in SU_2(C)$, alors $\lambda^2 - Tr(M)\lambda + det(M) = \lambda^2 - 2Re(a)\lambda + 1 = 0$.
   discriminant de cette équation en λ est $\Delta = Re^2(a) - 1$, or $|Re^2(a)| \leq |a|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 = 1$, donc $\Delta < 0$ et $\lambda = Re(a) \pm i\sqrt{1 - Re^2(a)}$, et par suite $|\lambda|^2 = Re^2(a) + (1 - Re^2(a)) = 1$.

   (b) ${}^t\overline{M} = M^{-1}$ et $MX = \lambda X$, donc $M^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$, donc ${}^t\overline{MY} = ({}^t\overline{M}X)\overline{Y} = {}^t(M^{-1}X)\overline{Y} = \frac{1}{\lambda}{}^tX\overline{Y} = 0$.

6. (a) Soit V_1 un vecteur propre unitaire de M, et soit $\mathbb{C}.V_2$ son orthogonal où V_2 est choisi unitaire, alors ${}^tV_1\overline{V_2} = 0$, et d'après la question $5.b$, ${}^tV_1\overline{MV_2} = 0$, donc MV_2 est orthogonal à V_1, et par suite MV_2 est lié à V_2, donc V_2 est un vecteur propre.
Ainsi (V_1, V_2) est une base orthonormale de vecteurs propres, et la matrice P de passage de la base canonique à cette base est élément de $SU(2,\mathbb{C})$, de plus si $Sp(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, alors $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, donc $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = e^{i\theta}$ et par suite $M = P\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P^{-1}$.

(b) $\Longrightarrow$ Soient $R = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P, S = Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}Q \in SU(2,\mathbb{C})$, tels que $Tr(R) = Tr(S)$, alors $cos(\theta) = cos(\varphi)$, alors $\theta \equiv \varphi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi[2\pi]$.
Quitte à échanger les colonnes de P, on peut supposer que $\theta \equiv \varphi[2\pi]$, donc $R = (Q^{-1}P)^{-1}S(Q^{-1}P)$.
$\Longleftarrow$ R et S sont semblables, donc elles ont même trace.

7. (a) $[A, B] = 0$, donc A et B commutent, de plus
$\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}(A+B)^l = \sum_{l+i\leq n}\frac{1}{l!i!}A^lB^i$ et $(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}A^j)(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k) = \sum_{j+k\leq 2n}\frac{1}{j!k!}A^jB^k$, donc
$|||\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}(A+B)^l - (\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}A^j)(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k)||| = |\sum_{n+1\leq j+k\leq 2n}\frac{1}{j!k!}A^jB^k||| \leq \sum_{n+1\leq j+k\leq 2n}\frac{1}{j!k!}|||A|||^j|||B|||^k =$
$\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}(|||A||| + |||B|||)^l - (\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}|||A|||^j)(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}|||B|||^k) \longrightarrow O$ lorsque n tend vers l'infini.
Cette quantité tend aussi vers $exp(A+B) - exp(A)exp(B)$, donc par unicité de la limite, on obtient $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{L}$ (${}^tA + \overline{A} = 0$ et $Tr(A) = 0$), montrons que $exp(A) \in \mathcal{L}$.
• D'après la question $2.d$, $det(exp(A)) = exp(Tr(A)) = e^0 = 1$.
• ${}^tA = -\overline{A}$, donc ${}^tA$ et $\overline{A}$ commutent, et par suite ${}^texp(A).\overline{exp(A)} = exp({}^tA).exp(\overline{A}) = exp({}^tA + \overline{A}) = exp(0) = I_2$.
Donc $exp(\mathcal{L}) \subset SU(2,\mathbb{C})$.

(c) Soit $A \in SU(2,\mathbb{C})$, alors d'après la question $6.a$, $\exists P \in SU(2,\mathbb{C})$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que
$A = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}P = exp(P-1\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}P)$.
Montrons que $M = P-1\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}P \in \mathcal{L}$.
• $Tr(M) = Tr(\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}) = 0$.
• ${}^tM = {}^tP\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}{}^tP^{-1}$, or ${}^tP = \overline{P}^{-1}$, donc ${}^tM = \overline{P}^{-1}\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta\end{pmatrix}\overline{P} = \overline{P^{-1}\begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta\end{pmatrix}P} = -\overline{M}$.
On a bien $A = exp(M)$ où $M \in \mathcal{L}$, donc $exp : \mathcal{L} \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})$ est surjective.

(d) $I_2 = exp(O) = exp(\begin{pmatrix} i2\pi & 0 \\ 0 & -i2\pi\end{pmatrix})$, mais $\begin{pmatrix} i2\pi & 0 \\ 0 & -i2\pi\end{pmatrix} \neq 0$, donc $exp : \mathcal{L} \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})$ n'est pas injective.

8. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$

(a) • Soit $A \in G - \{I_2, -I_2\}$, alors d'après $6.a$, $\exists P \in SU(2, C)$, $\theta \in R$ tels que $A = P^{-1}D(\theta)P$, donc $D(\theta) = PAP^{-1} \in G$.
• $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, donc $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

(b) Un calcul simple conduit à que λ et $\overline{\lambda}$ sont les éléments diagonaux demandés, avec

$$\lambda = (1 - e^{-i2\theta})|a|^2 + e^{-i2\theta}$$

(c) $\forall a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \leq 1$, la matrice $M_a = AD(\theta)A^{-1}D(-\theta)$ appartient à G, donc $\bigcup_{g\in G}\{Tr(g)\}$ contient $\bigcup_{|a|\leq 1}\{Tr(M_a)\} = \bigcup_{t\in[0,1]} f(t)\} = f([0,1])$ où on a posé
$f(t) = 2t(1 - cos(2\theta)) + 2cos(2\theta)$.
f étant continue, donc $f([0,1])$ est un intervalle égale à $[2cos(2\theta), 2] = [2-\mu, 2]$ avec $\mu = 4sin^2(\theta)$.

9. • Déjà $G \subset SU(2,\mathbb{C})$.
• Réciproquement,soit $A \in SU(2,\mathbb{C})$, alors $\exists P \in SU(2,\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $A = P^{-1}D(\alpha)P$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $Tr(D(\frac{\alpha}{n})) = 2cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ tend vers 2, lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $Tr(D(\frac{\alpha}{N})) \in [2-\delta, 2]$, ce qui entraine que d'après la question précédente que $\exists R \in G$ tel que $Tr(R) = Tr(D(\frac{\alpha}{N}))$, et d'après la question $6.b$, $\exists Q \in SU(2,\mathbb{C})$ tel que $R = Q^{-1}D(\frac{\alpha}{N})Q$, or G est un sous-groupe stable par conjugaison, donc $R^N = Q^{-1}D(\alpha)Q \in G$, et par suite $A = P^{-1}QR^NQ^{-1}P \in G$.
On conclut que $G = SU(2,\mathbb{C})$.

Troisième partie

10. On obtient $[e,z] = 2iz$, $[e,w] = -2iw$ et $[z,w] = 4ie$.
11. $eoz^2 = (zoe + 2iz)oz = zoeoz + 2iz^2 = z^2oe + 4iz^2$.
Supposons que $eoz^k = z^koe + 2ikz^k$, alors $eoz^{k+1} = (z^koe + 2ikz^k)oz = z^ko(zoe + 2iz) + 2ikz^{k+1} = z^{k+1}oe + 2i(k+1)z^k$ et la récurrence est établie, donc :
$$\forall k \in \mathbb{N}, eoz^k = z^koe + 2ikz^k$$
et par suite $e(z^k(v)) = z^k(e(v)) + 2ikz^k(v) = (\lambda + 2ik)z^k(v) = \mu_k z^k(v)$, avec $\mu_k = \lambda + 2ik$.
12. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $z^k(v) \neq 0$, alors $\{\mu_k \ / \ k \in \mathbb{N}\} \subset Sp(e)$, or les μ_k sont deux à deux distinctes, donc $Sp(e)$ est infini, ce qui contredit la finitude de la dimension de $\mathcal{E}$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ le plus petit tel que $z^p(v) = 0$, alors $z(v_0) = 0$ et $v_0 = z^{p-1}(v) \neq 0$ est un vecteur propre de e associé à la valeur propre $\lambda_0 = \mu_{p-1}$.
13. • On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $eow^k = w^koe - 2ikw^k$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e(v_k) = e(w^k(v_0)) = w^k(e(v_0)) - 2ikw^k(v_0) = (\lambda_0 - 2ik)w^k(v_0) = (\lambda_0 - 2ik)v_k$.
• Posons $\alpha_k = \lambda_0 - 2ik$, ainsi on $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e(v_k) = \alpha_k v_k$.
$z(v_1) = zow(v_0) = woz(v_0) + 4ie(v_0) = 4i\alpha_0 v_0$ et $z(v_2) = zow(v_1) = woz(v_1) + 4ie(v_1) = 4i(\alpha_0 + \alpha_1)v_1$.
Supposons que $z(v_k) = 4i(\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j)v_{k-1}$, alors $z(v_{k+1}) = zow(v_k) = woz(v_k) + 4ie(v_k) = 4i(\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j)w(v_{k-1}) + 4i\alpha_k v_k = 4i(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j)v_k$, d'où la récurrence est établie, or $\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j = \sum_{j=0}^{k-1}(\lambda_0 - 2ij) = k(\lambda_0 - i(k-1))$, donc :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \ , \ \ z(v_k) = 4ik(\lambda_0 - i(k-1))v_{k-1}$$
14. (a) Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k = w^k(v_0) \neq 0$, alors $\{\lambda_0 - 2ik \ / \ k \in \mathbb{N}^*\} \subset Sp(e)$, ceci contredit la finitude de la dimension de $\mathcal{E}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $w^n(v_0) \neq 0$, alors $v_{n+1} = 0$ et $(v_0, ..., v_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre.
    (b) On a $v_{n+1} = 0$, donc $z(v_{n+1}) = 4i(n+1)(\lambda_0 - in)v_n = 0$ et puisque $v_n \neq 0$, on obtient $\lambda_0 = in$,ce qui donne les égalités demandées.