

E4A 2002 (PSI 2)

Exercice 1

1° $z(t) = \lambda \Leftrightarrow \lambda t^4 - t^2 + \lambda = 0$. Le discriminant de cette équation en t^2 est $\Delta = 1 - 4\lambda^2$. Donc

→ Si $|\lambda| > \frac{1}{2}$, il n'y a aucun point d'intersection.

→ Si $\lambda = \frac{1}{2}$, la solution double est $t^2 = 1$, soit $t = \pm 1$. On obtient deux points d'intersection, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

→ Si $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, l'équation en t^2 a deux racines positives, ce qui donne 4 points d'intersection.

→ Si $\lambda = 0$, la seule solution est $t = 0$. Le seul point d'intersection est l'origine.

→ Si $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$, l'équation en t^2 a deux racines négatives et il n'y a donc aucun point d'intersection.

2° a) Remarquons que (Γ) est invariant par la symétrie par rapport à Oz parallèlement à xOy , deux points symétriques correspondant à deux valeurs opposées du paramètre t . Pour $\lambda \in J$, les 4 points d'intersection trouvés sont donc deux à deux symétriques ; étant situés dans (P_λ) qui est parallèle à xOy , ils sont deux à deux symétriques par rapport au point d'intersection de Oz avec (P_λ) . Ce sont donc les sommets d'un parallélogramme.

b) Remarquons aussi que le changement de t en $\frac{1}{t}$ échange x et y sans changer z ce qui montre l'invariance de (Γ) par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = y$ parallèlement au vecteur $(1, -1, 0)$. Or le produit des racines de l'équation en t^2 étudiée au 1° est égal à 1. Les solutions en t sont donc deux à deux inverses l'une de l'autre. Deux des côtés du parallélogramme sont donc dirigés par le vecteur $(1, -1, 0)$.

En composant les deux symétries, on en déduit que les points de (Γ) de paramètre t et $-\frac{1}{t}$ se déduisent l'un de l'autre par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = -y$ parallèlement au vecteur $(1, 1, 0)$ et donc que les deux autres côtés du parallélogramme sont donc dirigés par le vecteur $(1, 1, 0)$.

c) Les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même norme, d'où le résultat.

3° Notons (α, β, λ) les coordonnées de l'un des sommets du rectangle. Les deux sommets adjacents ont pour coordonnées respectives (β, α, λ) et $(-\beta, -\alpha, \lambda)$. L'aire S du rectangle est donc égale à $\sqrt{2(\alpha - \beta)^2} \sqrt{2(\alpha + \beta)^2} = 2|\alpha^2 - \beta^2| = 2 \left| \frac{t^2 - t^6}{(1 + t^4)^2} \right|$ où t est racine de l'équation étudiée en 1°. D'où

$$S = 2\lambda \left| \frac{1 - t^4}{1 + t^4} \right| = 2\lambda \frac{\left| 2 - \frac{t^2}{\lambda} \right|}{\frac{t^2}{\lambda}} = \frac{|4\lambda^2 - 2\lambda t^2|}{t^2} = \frac{|4\lambda^2 - 1 - \varepsilon\sqrt{1 - 4\lambda^2}|}{\frac{1 + \varepsilon\sqrt{1 - 4\lambda^2}}{2\lambda}} = 2\lambda\sqrt{1 - 4\lambda^2}.$$

Remarques :

En écrivant $x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^4}}$ et $y = \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^4}}$, on met en évidence une équation polaire de la projection de (Γ) sur xOy : $\rho = \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}}$, $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + t^4}}$, $\sin \vartheta = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^4}}$ ou encore . On "reconnaît" une lemniscate de Bernoulli.

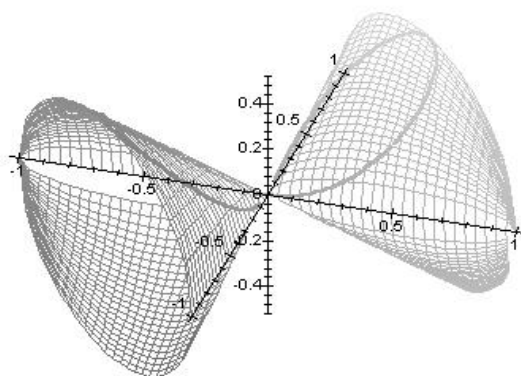
Par ailleurs, la courbe (Γ) est tracée sur le cône d'équation $xy = z^2$.

> with(plots) :

```

> F:=spacecurve([t/(1+t^4),t^3/(1+t^4),t^2/(1+t^4)],t=10..10,axes=boxed,
> numpoints=500,thickness=2):
> p:= proc(x,y) (x*y)^0.5 end:
> h:= proc(x) 1-x end:
> hh:= proc(x) -1-x end:
> G:=plot3d(p,0..1,0..h):
> H:=plot3d(-p,0..1,0..h):
> GG:=plot3d(p,-1..0,hh..0):
> HH:=plot3d(-p,-1..0,hh..0):
> display({F,G,H,GG,HH});

```



Exercice 2

1° a) Si $x = 0$, $u_n(x) = 0$ pour tout n et la série $\sum u_n(0)$ converge. Sinon, $u_n(x) \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}x^2}$ qui est le terme général d' une série convergente puisque $\alpha > 0$. Donc $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

b) $u'_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}(1 - nx^2)$. La fonction positive u_n admet donc son maximum pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et

$\|u_n(x)\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$. Donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) $|u_n(x)| \leq \frac{b}{n^\alpha(1+na^2)} \quad \forall x \in [a, b]$. Or $\frac{b}{n^\alpha(1+na^2)} \sim \frac{b}{a^2 n^{\alpha+1}}$ qui est le terme général d' une série convergente puisque $\alpha > 0$. Donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

d) i) Puisque tous les termes de la série sont positifs, $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$. Or

$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+kx^2} \geq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{1+tx^2} = \frac{1}{x^2} \ln \frac{1+(2n+1)x^2}{1+(n+1)x^2}$. D' où $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\frac{2n+1}{n}}{1+\frac{n+1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 - \ln 2}{\sqrt{2}}$. La

convergence de la série $\sum u_n$ n' est donc pas uniforme sur $[0, a]$, quel que soit $a > 0$.

2° a) Puisque $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ et que u_n est évidemment une fonction continue, S est continue sur $[a, b]$. Comme on peut choisir a et b arbitrairement dans $\mathbb{R}_+^*$, S est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Par le même argument, S est continue sur $[0, +\infty[$.

c) i) f est continue sur $[1, +\infty[$ et équivalente à $\frac{1}{xt^{\alpha+1}}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

ii) Comme f est décroissante, $\int_k^{k+j} f(t) dt \leq f(k)$; en sommant ces relations de $k = 1$ à $+\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S(x)$.

iii) Par le changement de variable $\sqrt{t} = u$ (qui est bien un difféomorphisme de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur lui-même, $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1-tx^2)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2xdu}{1+u^2x^2} = \frac{2}{x} [\text{Arc tan } ux]_1^{+\infty} = \frac{2}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x \right) = \frac{2}{x} \text{Arc tan } \frac{1}{x}$.

iv) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = +\infty$. Ce sera vrai a fortiori pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$ puisque $S(x)$ est une fonction décroissante de α . Donc S n'est pas continue en 0.

Exercice 3

Première partie

1° Les coefficients de A et de B étant tous positifs, ceux de AB le sont aussi. De plus, la somme des coefficients de la i -ème ligne de AB s'écrit $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n b_{kj} = 1$ ce qui montre que $AB \in S$.

2° Il est alors immédiat par récurrence sur k que $A^k \in S$ pour tout $k \geq 1$. C'est vrai aussi pour $k = 0$ car $A^0 = I$.

3° $\|AX\| = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{k=1}^n a_{ik} |x_k| \leq \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{k=1}^n a_{ik} \|X\| = \|X\|$.

4° Notons $M = A - I$. Les coefficients m_{ij} de M vérifient $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 0$; par conséquent, les colonnes de la matrice

M sont liées et 1 est bien une valeur propre de A . De plus, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

5° Soit X un vecteur propre associé à λ ; alors $AX = \lambda X$ d'où $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| \leq \|X\|$ d'après 3°. Comme X n'est pas le vecteur nul, $|\lambda| \leq 1$.

6° a) i) Puisque $X \in \text{Ker}(A - \lambda I)^2$, $Y \in \text{Ker}(A - \lambda I)$. En appliquant $k-1$ fois A à l'égalité définissant Y , il vient

$$\begin{cases} Y = AX - \lambda X \\ \lambda Y = A^2 X - \lambda AX \\ \dots\dots\dots \\ \lambda^{k-1} Y = A^k X - \lambda A^{k-1} X \end{cases}$$
. En combinant ces équations pour éliminer les termes $A^j X$ intermédiaires (on

multiplie la j -ème équation par λ^{k-j}) on trouve, pour $k \geq 1$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

ii) Puisque $|\lambda| = 1$, la suite des vecteurs $\lambda^k X$ est bornée, de même que la suite des vecteurs $A^k X$ d'après la question 3°. La suite des vecteurs $k\lambda^{k-1} Y$ l'est donc aussi, ce qui n'est possible que si $Y = 0$.

iii) Il résulte de ce qui précède que $\text{Ker}(A - \lambda I)^2 \subset \text{Ker}(A - \lambda I)$; comme l'inclusion inverse est évidente, on a l'égalité $\text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \text{Ker}(A - \lambda I)$.

b) Montrons le résultat à démontrer par récurrence sur k . Il est vrai pour $k = 2$. Admettons le pour $k-1$ et soit $X \in \text{Ker}(A - \lambda I)^k$ et $Y = (A - \lambda I)X$; alors $Y \in \text{Ker}(A - \lambda I)^{k-1} = \text{Ker}(A - \lambda I)$ d'où $X \in \text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \text{Ker}(A - \lambda I)$ ce qui achève la démonstration, l'inclusion inverse étant évidente.

Deuxième partie

1° a) $\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^p \lambda^k \right| = \frac{1}{p} \left| \frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda} \right| \leq \frac{2}{p|1-\lambda|}$ d'après 5°. Donc $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^p \lambda^k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

b) Si $X \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, $X_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^p \lambda^k X \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

2° Si A est diagonalisable, tout vecteur X est somme de vecteurs propres, soit $X = \sum_{i=1}^q X^{(i)}$ avec

$AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)}$. Alors $X_p = \sum_{i=1}^q X_p^{(i)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

3° a) En mettant A sous la forme $(A - \lambda I) + \lambda I$ et en remarquant que I commute avec toute autre matrice, on peut calculer A^k par application de la formule du binôme : $A^k = \sum_{j=0}^k C_k^j (A - \lambda I)^j (\lambda I)^{k-j} = \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j$. Si

$X \in \text{Ker}(A - \lambda I)^q$, $A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j X$.

b) On sait que pour k fixé, le coefficient du binôme C_k^j est maximal pour $j = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ (partie entière) et augmente lorsque j varie de 0 à $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Donc si $k \geq 2q - 2$, $C_k^j \lambda^{k-j} \leq C_k^{q-1} \lambda^{k-j} = \frac{k(k-1)\dots(k-q+2)}{(q-1)!} \lambda^{k-j}$. Cette quantité, produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ car $|\lambda| < 1$.

c) Pour $p \geq q$, $X_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{q-1} A^k X + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{p} \sum_{k=q}^p C_k^j \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j X$. Lorsque $p \rightarrow +\infty$, le premier terme de cette somme tend vers 0. De plus, il résulte de b) que $\frac{1}{p} \sum_{k=q}^p C_k^j \lambda^{k-j} = \frac{p-q+1}{p} \frac{1}{p-q+1} \sum_{k=q}^p C_k^j \lambda^{k-j} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ car la convergence d'une suite implique sa convergence au sens de Cesaro. Donc $X_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

4° a) Le théorème de Cayley-Hamilton montre que P_A est un polynôme annulateur de A . En supposant que les λ_j sont deux à deux distincts, le théorème de décomposition des noyaux affirme alors que

$F = \left(\bigoplus_{j=0}^s \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{k_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^r \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{q_j} \right)$. D'après la première partie,

$$F = \left(\bigoplus_{j=0}^s \text{Ker}(A - \lambda_j I) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^r \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{q_j} \right).$$

b) Décomposons X dans cette somme directe : $X = X^{(0)} + \dots + X^{(s)} + X^{(s+1)} + \dots + X^{(r)}$. Alors $X_p = X_p^{(0)} + \dots + X_p^{(s)} + X_p^{(s+1)} + \dots + X_p^{(r)}$. Convenons que $\lambda_0 = 1$. Alors

→ $X_p^{(0)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^p X = \frac{p+1}{p} X^{(0)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^{(0)}$.

→ Pour $1 \leq j \leq s$, $X^{(j)}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre de module 1 mais différente de 1. D'après 1° b), $X_p^{(j)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

→ Pour $s+1 \leq j \leq r$, $X^{(j)}$ est un vecteur vérifiant les hypothèses de 3° ; d'après 3° c), $X_p^{(j)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $X_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^{(0)}$.