

# CCP 1994 MP Maths 2 (4h)

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

## Préambule

Le problème propose l'étude, dans trois cadres distincts, des propriétés des polynômes  $P_n$  de Gegenbauer.

Ces polynômes sont d'abord définis, c'est l'objet de la première partie, dans le cadre d'une analyse de Fourier. Ils apparaissent ensuite par leur fonction génératrice dans la deuxième partie, comme coefficients des termes d'une série entière.

Enfin, la troisième partie, qui les fait intervenir dans le cadre de la recherche des vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint, fournit quelques applications, conséquences de l'orthogonalité.

## Première Partie

Le nombre réel  $\lambda$  étant donné, vérifiant  $0 < |\lambda| < 1$ , on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(\theta) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2}$$

### 1. Propriétés de $f$

- Montrer que  $f$  est paire et périodique. Préciser sa période.
- Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

### 2. Représentation graphique de $f$

Représenter, dans un système d'axes orthonormés, la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2\pi, +2\pi]$ , le nombre  $\lambda$  étant choisi égal à 0,75.

### 3. Coefficients de Fourier de $f$

Les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$  sont notés  $a_n$  et  $b_n$  pour  $n > 0$  et  $\frac{a_0}{2}$  est le premier coefficient.

- Indiquer la valeur de  $b_n$  et écrire les coefficients  $a_n$  à l'aide d'intégrales portant sur le segment  $[0, \pi]$ .
- Calculer  $a_1$  en fonction de  $a_0$  et de  $\lambda$
- Après avoir linéarisé, pour  $n \geq 1$ , l'expression  $(1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2) \cos n\theta$ , montrer qu'il existe entre trois termes  $a_n$  d'indices consécutifs une relation du type :  
(1)  $\alpha a_{n+1} + \beta a_n + \gamma a_{n-1} = 0, \quad \forall n \geq 1$   
où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois nombres réels ne dépendant que de  $\lambda$ .
- Déterminer toutes les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  à valeurs réelles ou complexes, dépendant du paramètre  $\lambda$ , satisfaisant à la relation (1) et au résultat obtenu dans b).
- Calculer  $a_0$  et en déduire, en fonction de  $n$  et de  $\lambda$ , l'expression du coefficient  $a_n$

### 4. Développement en série de Fourier

- Justifier l'égalité, pour tout  $\theta$  réel :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos n\theta$$

- Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(\theta) = \lambda f(\theta) \sin \theta$
- En déduire qu'il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions polynomiales indépendantes de  $\lambda$  telle que, pour tout  $\theta$  réel, on ait :

$$(2) \quad f(\theta) = \sum_0^{+\infty} \lambda^n P_n(\cos \theta)$$

Déterminer les polynômes  $P_0, P_1, P_2$

## Deuxième Partie

Dans cette partie, l'utilisation de la variable  $x = \cos \theta$  permet de considérer les polynômes  $P_n$  (conformément d'ailleurs à la formule (2)), comme les coefficients d'un développement en série entière.

1. Etant donné un nombre complexe  $z$  de module strictement inférieur à un et, s'il n'est pas nul, d'argument  $\theta$ , calculer en fonction du module de  $z$  et de  $\theta$ , le terme général  $U_n$  de la série produit des deux séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}^n \quad (\text{où } \bar{z} \text{ est le conjugué de } z)$$

2. (a) Vérifier, pour tout entier naturel  $n$ , qu'il existe une et une seule fonction numérique  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, paire et continue telle que :

$$\forall \theta \in ]0, \pi[ \quad , \quad f_n(\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

- (b) Quelle relation existe-t-il entre  $P_n$  et  $f_n$  ?

- (c) Vérifier que, pour tout entier  $n$  et tout réel  $\theta$ , on a :

$$|f_n(\theta)| \leq n + 1$$

- (d) Soit  $\theta$  fixé et  $h \in \mathbb{R}$ . Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n f_n(\theta)$  et calculer la somme de cette série.

### 3. Propriétés des polynômes $P_n$

- (a) Dédire des résultats précédents que la fonction  $g$  de deux variables  $x$  et  $h$  définies dans  $[-1, +1] \times ]-1, +1[$  par :

$$g(x, h) = \frac{1}{1 - 2hx + h^2}$$

est développable en série entière en  $h$  sous la forme :

$$g(x, h) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) h^n$$

où les  $P_n$  sont les fonctions polynomiales définies au I.4).

Vérifier que :  $\forall x \in [-1, +1] \quad |P_n(x)| \leq n + 1$

- (b) Donner les valeurs de  $P_n(1)$  et  $P_n(-1)$

- (c) Montrer, pour  $n \geq 1$ , que le polynôme  $P_n$  a  $n$  racines dans  $] -1, +1[$ . Préciser ces racines.

### 4. Relations de récurrence

- (a) Justifier l'écriture de deux façons différentes du développement en série entière en  $h$  pour  $h \in ] -1, +1[$  de la fonction  $G$  définie par :

$$G(x, h) = (1 - 2hx + h^2) \frac{\partial g}{\partial h}(x, h)$$

- (b) En déduire, pour  $n \geq 1$ , une relation de récurrence entre trois polynômes  $P_{n+1}$ ,  $P_n$ ,  $P_{n-1}$  d'indices consécutifs. Quel est le degré de  $P_n$  et la valeur du coefficient de plus haut degré? Que peut-on dire de ses racines ?

- (c) Retrouver cette relation en utilisant la somme :

$$f_{n+1}(\theta) + f_{n-1}(\theta)$$

- (d) Déterminer les polynômes  $P_3$  et  $P_4$ .

## Troisième Partie

### Orthogonalité des polynômes $P_n$

On se propose de relier les polynômes  $P_n$  à l'application linéaire  $D$  associant à toute fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[-1, +1]$  la fonction continue  $Df$  définie sur  $[-1, +1]$  par :

$$Df(x) = -3xf'(x) + (1-x^2)f''(x)$$

On vérifiera que, sur  $] - 1, +1[$ ,  $Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} ((1-x^2)^{3/2} f'(x))$

Dans ce qui suit,  $E$  désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe  $C^1$  sur  $[-1, +1]$  et on considère la forme bilinéaire symétrique sur  $E \times E$  définie par :

$$(f, g) \rightarrow (f/g) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x)g(x) dx$$

Les sous espaces vectoriels de  $E$  constitués des fonctions polynômes (respectivement polynômes de degré  $\leq n$ ) sont notés  $\mathcal{P}$  (resp  $\mathcal{P}_n$ )

#### 1. Propriétés de $D$ sur $\mathcal{P}$

- Vérifier que  $(f/g)$  définit sur  $E$  un produit scalaire.
- Montrer que les restrictions  $T$  (resp  $T_n$ ) de  $D$  à  $\mathcal{P}$  (resp  $\mathcal{P}_n$ ) induisent des endomorphismes de  $\mathcal{P}$  (resp  $\mathcal{P}_n$ )
- Prouver que, pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathcal{P}$ , on a  $(TP/Q) = (P/TQ)$

#### 2. Valeurs propres et vecteurs propres de $T$

- En s'aidant par exemple de la matrice de  $T_n$  sur la base canonique de  $\mathcal{P}_n$ , prouver que l'ensemble des valeurs propres de  $T_n$  peut être ordonné en une suite décroissante  $(\lambda_p)$   $0 \leq p \leq n$  d'entiers négatifs ou nuls. Prouver également que les sous espaces propres associés sont de dimension 1.
- Déterminer l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_p)$  vérifiée par les polynômes vecteurs propres de  $T$  associés à  $\lambda_p$ .
- Soit  $x \rightarrow y(x)$  une solution sur  $] - 1, +1[$  de l'équation  $(\mathcal{E}_p)$ . On pose  $\theta = \arccos x$ . Montrer que la fonction  $z$  définie sur  $]0, \pi[$  par :  $z(\theta) = \sin \theta y(\cos \theta)$  est solution d'une équation différentielle linéaire  $(\mathcal{E}_p)$  du second ordre homogène à coefficients constants que l'on déterminera.
- Intégrer l'équation  $(\mathcal{E}_p)$  et en déduire la solution générale sur  $] - 1, +1[$  de l'équation  $(\mathcal{E}_p)$ .
- Déduire de ce qui précède les vecteurs propres de  $T$  et en comparant les polynômes obtenus aux éléments de la suite  $(P_n)$  des précédentes parties, déterminer les relations d'orthogonalité vérifiées par ces polynômes  $P_n$  dans l'espace préhilbertien réel  $E$ .
- Calculer la norme de  $P_n$ .

#### 3. Développement d'une fonction de $E$

On désigne par  $(p_n)$  la suite de polynômes définie par  $p_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$  ( $\|\cdot\|$  désignant la norme associée au produit scalaire) et, pour toute fonction  $g$  de  $E$ , on pose, quel que soit l'entier  $n$ ,  $c_n(g) = (g/p_n)$

- Trouver une fonction  $2\pi$ -périodique  $h$  impaire dont les coefficients de Fourier trigonométriques  $b_n(h)$  vérifient :  $c_n(g) = b_{n+1}(h)$
- En déduire que  $g$  peut être développée en série de polynômes  $P_n$  suivant la formule :

$$\forall x \in [-1, +1] \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_0^{+\infty} c_n(g) P_n(x)$$

- Montrer que la série  $\sum_0^{+\infty} c_n(g)^2$  est convergente et exprimer sa somme à l'aide de  $\|g\|$