I.A.1) Soit (n,x) fixé dans $\mathbb{N}^*\times[-1,1]$. Posons : $\theta = Arccos\,x$.

On a : $f_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\,cos(n\theta) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\,Re\left[exp\,(in\theta)\right] = \dfrac{1}{2^{n-1}}\,Re\left[(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n\right] = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\,cos^{n-2k}\theta\,(i\,sin\,\theta)^{2k}$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\,(-1)^k cos^{n-2k}\theta\,sin^{2k}\theta = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\,(-1)^k cos^{n-2k}\theta\,(1-cos^2\theta)^k$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\,x^{n-2k}(x^2-1)^k$

Nous pouvons déjà affirmer que f_n est une application polynômiale à coefficients réels de degré au plus n.

Nommons $a_{n,0}$ le coefficient de x^n dans $f_n(x)$. On a : $a_{n,0} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}$

Or : $\sum\limits_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k}\ \sum\limits_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_n^{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

$\sum\limits_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k} - \sum\limits_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_n^{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\quad \sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} = 2^{n-1}$, donc : $a_{n,0} = \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1$

Donc, pour tout n de N^*, f_n est une application polynômiale de degré n à coefficients réels.

I.A.2) On a prouvé en **I.A.1)** que T_n est de degré n et que son terme de degré n est X^n, autrement dit : T_n est unitaire.

I.A.3) D'après le calcul de **I.A.1)**, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in[-1,1]\quad f_1(x) &= \frac{1}{2^0}\sum_{k=0}^{0} C_1^{2k}\,x^{1-2k}(x^2-1)^k = x\\
f_2(x) &= \frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{1} C_2^{2k}\,x^{2-2k}(x^2-1)^k = \frac{1}{2}\left[x^2+x^2-1\right] = x^2-\frac{1}{2}\\
f_3(x) &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{1} C_3^{2k}\,x^{3-2k}(x^2-1)^k = \frac{1}{4}\left[x^3+3x(x^2-1)\right] = x^3-\frac{3}{4}x\\
f_4(x) &= \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{2} C_4^{2k}\,x^{4-2k}(x^2-1)^k = \frac{1}{8}\left[x^4+6x^2(x^2-1)+(x^2-1)^2\right] = x^4-x^2+\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Donc $T_1(X) = X,\quad T_2(X) = X^2-\dfrac{1}{2},\quad T_3(X) = X^3-\dfrac{3}{4}X,\quad T_4(X) = X^4-X^2+\dfrac{1}{8}$

I.A.4) Pour tout (n,x) de $\left(\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\right)\times[-1,1]$, on a, en posant $\theta = Arccos\,x$:

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) &= 2^nT_{n+1}(x)2^{n-2}T_{n-1}(x) = 2^nf_{n+1}(x)2^{n-2}f_{n-1}(x) = cos\left[(n+1)\theta\right]cos\left[(n-1)\theta\right]\\
&= 2\,cos(n\theta)\,cos\,\theta = 2\times2^{n-1}\times f_n(x)\times x = 2^n x\,T_n(x) = 2\,x\,P_n(x)
\end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \forall\, x\in[-1,1]\quad P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - 2\,x\,P_n(x) = 0.$

Or seul le polynôme nul a une infinité de zéros, donc : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\quad P_{n+1}P_{n-1} = 2X\,P_n.$

I.A.5) On a : $\forall\, k \in [\![1,n]\!] \quad P_n(x_k) = 2^{n-1}T_n(x_k) = 2^{n-1}f_n(x_k) = cos\left[n\, Arccos\left(cos\left[\frac{2k-1}{2n}\times\pi\right]\right)\right] = cos\left(n\times\frac{2k-1}{2n}\times\pi\right)$

$= cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right] = (-1)^k cos\,\frac{\pi}{2} = 0$ on a utilisé $\frac{2k-1}{2n}\times\pi \in [0,\pi]$

De plus $\left(\frac{2k-1}{2n}\times\pi\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une suite strictement croissante à valeurs dans $[0,\pi]$ et la fonction *cosinus* est strictement décroissante sur $[0,\pi]$; les x_k, k variant dans $[\![1,n]\!]$, sont donc deux à deux distincts.

Enfin, P_n, comme T_n, est de degré n et a donc exactement n zéros complexes (en tenant compte des zéros multiples).

Ceci permet de conclure : <u>les racines de P_n sont exactement les x_k, k variant dans $[\![1,n]\!]$, et ces racines sont simples.</u>

I.A.6) On a : $\forall\, x \in [-1,1] \quad \left|f_n(x)\right| = \left|\frac{1}{2^{n-1}}\, cos\big(n\, Arccos\, x\big)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$

Or : $\forall\, x \in [-1,1] \quad \left|cos\big(n\, Arccos\, x\big)\right| = 1 \iff \left(\exists\, k\in\mathbf{Z} \,/\, n\, Arccos\, x = k\pi\right) \iff \left(\exists\, k\in[\![0,n]\!] \,/\, Arccos\, x = \frac{k\pi}{n}\right)$

$\iff \left(\exists\, k\in[\![0,n]\!] \,/\, x = cos\,\frac{k\pi}{n}\right)$

Donc : $\underline{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, x\in[-1,1],\ \forall\, k\in[\![0,n]\!] \quad \left|f_n(x)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}} = \left|f_n\left(cos\,\frac{k\pi}{n}\right)\right|}$

Ou, plus précisément :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\,(n,x,k,k')\in\mathbb{N}^*\times[-1,1]\times[\![0,E\left(\frac{n-1}{2}\right)]\!]\times[\![0,E\left(\frac{n}{2}\right)]\!] \\ \qquad -\frac{1}{2^{n-1}} = f_n\left(cos\,\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \le f_n(x) \le f_n\left(cos\,\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\end{array}}$$

I.A.7) On a : $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\, X^{n-2k} \sum\limits_{p=0}^{k} C_k^p\,(-1)^p X^{2k-2p} = \sum\limits_{k=0}^{E(n/2)}\sum\limits_{p=0}^{k} C_n^{2k}\, C_k^p\,(-1)^p X^{n-2p}$

$= \sum\limits_{p=0}^{E(n/2)}\left(\sum\limits_{k=p}^{E(n/2)} C_n^{2k}\, C_k^p\right)(-1)^p X^{n-2p}$

D'où l'algorithme suivant :

```
Entrer la valeur de n (à prendre dans N*)
p ← 0, c ← −1
Répéter  a(p) ← 0, c ← −c
         Répéter  k ← p
                  a(p) ← a(p) + C(n,2k)×C(k,p)
                  k ← p + 1
         Jusqu'à k > n/2
         a(p) ← a(p)×c
         p ← p + 1
Jusqu'à p > n/2
Écrire a(0)X^n
p ← 1
Tant que p ≤ n/2 Répéter  Écrire +a(p)X^(n−2p)
                          p ← p + 1
Fin.
```

I.B.1)

$\forall\, x \in [-1, 1] \quad f_1(x) = x$

$\forall\, x \in [-1, 1] \quad f_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}\,, \quad f_2'(1) = 2$

$\forall\, x \in [-1, 1] \quad f_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x = x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f_3'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f_3'(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-$	0	$+$	$\frac{9}{4}$
$f_3(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

$\forall\, x \in [-1, 1] \quad f_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$

$= \left(x^2 - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)$

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \simeq 0,924\,, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \simeq 0,383$

$f_4'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f_4'(x)$	0	$-$	0	$+$	2
$f_4(x)$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$

$\forall\, n \in [\![1, 4]\!] \quad f_n$ a la parité de n

(vrai en fait pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

I.B.2) Soit P un polynôme à coefficients réels, unitaire, de degré n. Supposons : $\underset{-1 \leq x \leq 1}{Sup} \left|P(x)\right| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Alors, d'après **I.A.6)** : $\forall\, k \in [\![0, E\left(\frac{n}{2}\right)]\!] \quad (T_n - P)\left[cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \dfrac{1}{2^{n-1}} - P\left[cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] > 0$

$\forall\, k \in [\![0, E\left(\frac{n-1}{2}\right)]\!] \quad (T_n - P)\left[cos\left(\frac{2k+1}{n}\,\pi\right)\right] = -\dfrac{1}{2^{n-1}} - P\left[cos\left(\frac{2k+1}{n}\,\pi\right)\right] < 0$

Donc la suite $\left((T_n - P)\left[cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de signe alterné.

De plus, la suite $\left(cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est strictement décroissante car la fonction *cosinus* décroît strictement sur $[0, \pi]$.

Enfin $T_n - P$, fonction polynômiale, est continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermèdiaires, $T_n - P$ s'annule sur chacun des intervalles ouverts bornés délimités par la suite $\left(cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ donc $T_n - P$ a n zéros distincts et n'est pas le polynôme nul.

Donc $T_n - P$ est de degré au moins n.

Or Tn et P sont unitaires et de degré n, donc $T_n - P$ n'est pas de degré au moins n.

Notre supposition est donc fausse.

Conclusion : il n'existe pas de polynôme P, à coefficients réels, unitaire, de degré n, tel que : $\underset{-1 \leq x \leq 1}{Sup} \left|P(x)\right| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

I.B.3) Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels.

D'après **I.B.2)** : $\underset{-1\leq x\leq 1}{Sup}\left|P(x)\right| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Or, d'après **I.A.6)** : $\underset{-1\leq x\leq 1}{Sup}\left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Donc, pour tout polynôme unitaire P de degré n à coefficients réels : $\underset{-1\leq x\leq 1}{Sup}\left|f_n(x)\right| \leq \underset{-1\leq x\leq 1}{Sup}\left|P(x)\right|$

I.B.4) • $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur]-1, 1[,

• si $f(1)\neq 0$ alors $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{f(1)}{\sqrt{2}\,(1-x)^{1/2}}$ et si $f(1)=0$ alors $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\ll} \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$,

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ converge, donc, d'après la règle de l'équivalence, le théorème de majoration, l'absolue convergence et les intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge en 1,

• un raisonnement similaire permet d'établir la convergence en -1.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.

I.B.5.a) • Sachant que $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ est stable par produit, **I.B.4)** nous permet d'affirmer que $(f,g)\longmapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ définit bien une application de $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ vers $\mathbb{R}$.

Posons : $\forall\,(f,g)\in\big[\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)\big]^2 \quad <f|g> = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

• On a immèdiatement : $\forall\,(f,g)\in\big[\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)\big]^2 \quad <f|g> = <g|f>$

• De plus : $\forall\,(\alpha_1,\alpha_2,f_1,f_2,g)\in\mathbb{R}^2\times\big[\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)\big]^3$

$$\begin{aligned}<\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2|g> &= \int_{-1}^1 \frac{(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha_1\int_{-1}^1 \frac{f_1(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}\alpha_2\int_{-1}^1 \frac{f_2(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \alpha_1 <f_1|g>\,\alpha_2<f_2|g>\end{aligned}$$

Ceci joint à la symètrie vue au point ci-dessus permet d'obtenir la linéarité à droite.

• Enfin : $\forall\,(f,g)\in\big[\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)\big]^2$

$<f|f> = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$

$<f|f> = 0 \iff \left(\forall\, x\in]-1,1[\ \ \dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}=0\right)$ car $x\longmapsto \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur]-1,1[et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$\iff (\forall\, x\in]-1,1[\ \ f(x)=0) \iff (\forall\, x\in[-1,1]\ \ f(x)=0)$ car f est continue sur [-1,1].

$\iff f = 0_{\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})}$

Donc $<\ |\ >$ est une forme bilinéaire symètrique définie positive sur $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

Autrement dit, $<\ |\ >$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

I.B.5.b) On a : $\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}\quad <P_n|P_m> \;=\; \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2^{n-1}f_n(x)2^{m-1}f_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int_{-1}^{1}\frac{cos\big(n\,Arccos\,x\big)\,cos\big(m\,Arccos\,x\big)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \int_{\pi}^{0}\frac{cos(n\theta)\,cos(m\theta)\,(-sin\,\theta\;d\theta)}{\sqrt{1-cos^2\theta}} \;=\; \int_{0}^{\pi}\frac{cos(n\theta)\,cos(m\theta)\,sin\,\theta\;d\theta}{|sin\,\theta|}$$

$$= \textstyle\int_0^{\pi} cos(n\theta)\,cos(m\theta)\,d\theta \;=\; \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(cos\big[(n+m)\theta\big]\,cos\big[(n-m)\theta\big]\Big)\,d\theta$$

Donc : $\forall\,n\in\mathbb{N}^{*}\quad <P_n|P_n> = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[cos(2n\theta)+1]\,d\theta \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{sin(2n\theta)}{2n}\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{2}$

donc $\|P_n\| \;=\; \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ donc $\|h_n\| \;=\; 1.$

$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}\quad n\neq m \Longrightarrow <P_n|P_m> = \displaystyle\frac{1}{2}\left[\frac{sin\big[(n+m)\theta\big]}{n+m}\,\frac{sin\big[(n-m)\theta\big]}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0 \Longrightarrow P_n\perp P_m$

$\Longrightarrow h_n\perp h_m$

La famille $\big(h_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien une famille orthonormale de $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ pour ce produit scalaire.

II.A.1) On a : $\forall\,(A,B)\in E^2\quad d(A,B) \;=\; AB \;=\; \|\overrightarrow{AB}\| \;=\; \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_A-y_B)^2}$

$\big((x_A,y_A)$ et (x_B,y_B) sont les coordonnées respectives de A et B dans $(O,\vec{i},\vec{j})\big)$

Donc
- d est bien une application de $E\times E$ vers $\mathbb{R}^+$,
- en identifiant le plan euclidien et $\mathbb{R}^2$ à l'aide du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, d est la composée d'une fonction polynômiale à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de la fonction $\sqrt{\;}$, donc d est continue.

d est donc une application continue de $E\times E$ vers $\mathbb{R}^+$.

Or :
- E est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ donc $E\times E$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^4$,
- une application continue d'un fermé borné de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Donc $\underset{E\times E}{Sup}\;d$ existe dans $\mathbb{R}$. Donc d_2 est bien défini dans $\mathbb{R}$.

Par ailleurs
- un produit d'applications continues à valeurs réelles est continu,
- la racine cubique d'une application continue à valeurs réelles est continue.

Donc la continuité de d entraîne celle de $\begin{array}{ccc} E^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B,C) & \longmapsto & (AB\times AC\times BC)^{1/3} \end{array}$

E^3 est encore un fermé borné de $\mathbb{R}^6$.

Une application continue d'un fermé borné de $\mathbb{R}^6$ vers $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Donc $\underset{(A,B,C)\in E^3}{Sup}\;(AB\times AC\times BC)^{1/3}$ existe dans $\mathbb{R}$. Donc d_3 est bien défini dans $\mathbb{R}$.

II.A.2) On a : $\forall\,(A,B,C)\in E^3\quad d\,(A,B,C) \;=\; (AB\times AC\times BC)^{1/3} \;\leq\; (d_2\times d_2\times d_2)^{1/3} \;=\; d_2$

Donc : $d_3 = \underset{(A,B,C)\in E^3}{Sup}\;d\,(A,B,C) \;\leq\; d_2$

II.A.3) On a : $\forall\,(A,B,C)\in E^3 \quad d\,(A,B,C) \leq \underset{C'\in E}{Sup}\ d\,(A,B,C') \leq \underset{(A',B')\in E^2}{Sup}\left[\underset{C'\in E}{Sup}\ d\,(A',B',C')\right]$

Donc : $d_3 = \underset{(A,B,C)\in E^3}{Sup}\ d\,(A,B,C) \leq \underset{(A',B')\in E^2}{Sup}\left[\underset{C'\in E}{Sup}\ d\,(A',B',C')\right] = \underset{(A,B)\in E^2}{Sup}\left[\underset{C\in E}{Sup}\ d\,(A,B,C)\right]$

De plus : $\forall\,(A,B)\in E^2 \quad \underset{C\in E}{Sup}\ d\,(A,B,C) = Sup\left\{d\,(A',B',C'),\ A'=A,\ B'=B,\ C'\in E\right\}$
$\leq Sup\left\{d\,(A',B',C'),\ (A',B',C')\in E^3\right\} = \underset{(A',B',C')\in E^3}{Sup}\ d\,(A',B',C') = d_3$

Donc : $\underset{(A,B)\in E^2}{Sup}\left[\underset{C\in E}{Sup}\ d\,(A,B,C)\right] \leq d_3$ Donc, en regroupant : $d_3 = \underset{(A,B)\in E^2}{Sup}\left[\underset{C\in E}{Sup}\ d\,(A,B,C)\right]$

II.B • Soient $A,\ B,\ C$ trois points de E, E étant un segment de longueur a.
Quitte à permuter $A,\ B,\ C$, ce qui ne modifie pas la valeur de $d\,(A,B,C)$, on peut imposer à B d'appartenir au segment $[A,C]$.
On a alors : $AC = ABBC \leq a$.
Donc : $\left[d\,(A,B,C)\right]^3 = AB\times(AB+BC)\times BC = AB^2\times BCAB\times BC^2 \leq AB^2(a-AB)AB\,(a-AB)^2$
$\leq a\,AB^2 - AB^3 + a^2AB - 2a\,AB^2 + AB^3 = a^2AB - a\,AB^2 = a\left[-AB^2 + a\,AB\right]$
$\leq a\left[-\left(AB-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right] \leq \dfrac{a^3}{4}$

Donc : $\forall\,(A,B,C)\in E^3 \quad d\,(A,B,C) \leq \dfrac{a}{4^{1/3}}$ donc $d_3 \leq \dfrac{a}{4^{1/3}}$

• Soient A et C les extrémités du segment E et B son milieu.
Alors : $d\,(A,B,C) = \left[AB\times AC\times BC\right]^{1/3} = \left[\frac{a}{2}\times a\times\frac{a}{2}\right]^{1/3} = \left(\frac{a^3}{4}\right)^{1/3} = \dfrac{a}{4^{1/3}}$
Donc : $d_3 \geq \dfrac{a}{4^{1/3}}$
Donc, en regroupant : si E est un segment de longueur a alors $d_3 = \dfrac{a}{4^{1/3}}$ ·

II.C.1) Soit H le milieu du segment $[A,B]$. Alors : $AB = 2\,AH$.
Le triangle OAB est isocèle de sommet principal O donc (OH) est axe de symétrie du triangle OAB.
Donc : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}}) = \frac{1}{2}\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\ [\pi]$ et $AH = OA\times\left|sin\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}})\right| = R\times\left|sin\,\frac{(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}})}{2}\right| = R\times\left|sin\,\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$
$= R\times sin\,\frac{\beta-\alpha}{2}$ car $\beta-\alpha\in[0,\pi]$

Donc : si les angles polaires de deux points A et B de E ont pour mesures respectives α et β (avec $0\leq\alpha\leq\beta$), alors $AB = 2\,R\,sin\,\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ ·

II.C.2) Posons : $f : \begin{array}{rcl} [\alpha,\gamma] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \beta & \longmapsto & \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,\sin\frac{\gamma-\beta}{2} \end{array}$

On a : $\forall\,\beta\in[\alpha,\gamma]\quad f'(\beta) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\,\sin\frac{\gamma-\beta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,\cos\frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{1}{2}\sin\left[\frac{\gamma-\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\sin\left[\frac{\alpha+\gamma}{2} - \beta\right]$

$\frac{\alpha+\gamma}{2} - \beta \in \left[-\frac{\gamma-\alpha}{2}, \frac{\gamma-\alpha}{2}\right] \subset [-\pi,\pi]$

D'où le tableau de variations :

β	α		$\frac{\alpha+\gamma}{2}$		γ
$f'(\beta)$		$-$	0	$+$	
$f(\beta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus : $f\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \sin\dfrac{\frac{\alpha+\gamma}{2}-\alpha}{2}\,\sin\dfrac{\gamma-\frac{\alpha+\gamma}{2}}{2}$

Donc $\begin{array}{rcl} [\alpha,\gamma] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \beta & \longmapsto & \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,\sin\frac{\gamma-\beta}{2} \end{array}$ atteint son maximum en $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ et ce maximum vaut $\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}$ ·

II.C.3) On a : $\forall\,t\in[0,1[\quad \varphi'(t) = 3t^2\times\sqrt{1-t^2} - 2\,t^4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\times\left[3\,(1-t^2)-t^2\right] = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\times\left(3-4t^2\right)$

D'où le tableau de variations :

t	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0

car $\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{3^{3/2}}{8}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3^{3/2}}{16}$

II.C.4) • Soient $A,\ B,\ C$ trois points de E et α , β , γ les mesures dans $[0,2\pi[$ de leurs angles polaires respectifs. Quitte à permuter $A,\ B,\ C$, ce qui ne modifie pas la valeur de $d\,(A,B,C)$, on peut imposer : $\alpha\leq\beta\leq\gamma$.

Alors, d'après **II.C.1)** : $d\,(A,B,C) = \left(AB\times AC\times BC\right)^{1/3} = 2R\left(\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\times\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\times\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)^{1/3}$

Donc, d'après **II.C.2)** : $d\,(A,B,C) \leq 2R\left[\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}\times\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right]^{1/3} = 2R\left[2\sin^3\frac{\gamma-\alpha}{4}\times\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}\right]^{1/3}$

$\leq 2^{4/3}R\left(t^3\sqrt{1-t^2}\right)^{1/3}$ avec $t = \sin\frac{\gamma-\alpha}{4}\in[0,1]$ car $0\leq\alpha\leq\gamma\leq 2\pi$.

Donc, d'après **II.C.3)** : $d\,(A,B,C) \leq 2^{4/3}R\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)^{1/3} = \sqrt{3}\,R$

Donc : $\forall\,(A,B,C)\in E^3\quad d\,(A,B,C) \leq \sqrt{3}\,R$ donc $d_3 \leq \sqrt{3}\,R$.

• Choisissons maintenant $A,\ B,\ C$ dans E tels que : $\alpha = 0,\ \beta = \frac{2\pi}{3},\ \gamma = \frac{4\pi}{3}$ ·

Alors : $d\,(A,B,C) = 2\,R\left[\sin\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{1/3} = 2\,R\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{1/3} = \sqrt{3}\,R$.

Donc : $d_3 \geq \sqrt{3}\,R$.

Donc, en regroupant, si E est le cercle $\mathcal{C}(O,R)$ alors $d_3 = \sqrt{3}\,R$.

III.A.1) On a :
- D est une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$,
- D est le produit de la composée de fonctions polynômes avec la fonction valeur absolue, donc D est continue sur $\mathbb{R}^n$,
- E^n, c'est à dire $[-1,1]^n$, est un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$, E^n est donc un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Donc la restriction de D à E^n est bornée et atteint ses bornes.

Donc : $\underline{\forall\, n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\} \quad \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in E^n \,/\, D(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \underset{(x_1,\dots,x_n)\in E^n}{Sup} D(x_1,\dots,x_n) = D_n}$

III.A.2) Soit donc $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$, élément de E^{n+1} tel que : $D_{n+1} = D(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$.

Alors : $$D_{n+1}=\prod_{1\le i<j\le n+1}|\lambda_j-\lambda_i| = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i+1}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_i| = \left(\prod_{j=2}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_1|\right)\times\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=i+1}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_i|$$
$$= \left(\prod_{j=2}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_1|\right)\times\prod_{2\le i<j\le n+1}|\lambda_j-\lambda_i| = \left(\prod_{j=2}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_1|\right)\times\prod_{1\le i'<j'\le n}|\lambda_{j'+1}-\lambda_{i'+1}| \qquad \begin{cases} i'=i-1\\ j'=j-1\end{cases}$$
$$= \left(\prod_{j=2}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_1|\right)\times D(\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1})$$

Donc : $\underline{D_{n+1} \le \left(\prod_{j=2}^{n+1}|\lambda_j-\lambda_1|\right)\times D_n}$

III.A.3) Soit encore $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$, élément de E^{n+1} tel que : $D_{n+1} = D(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$.

Permuter les λ_i ne modifie manifestement pas la valeur de $D(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$.

Donc, d'après **III.A.2)** : $\forall\, j\in[\![1,n+1]\!] \quad D_{n+1} \le \prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{j\}}|\lambda_j-\lambda_i| \times D_n$

Donc : $$D_{n+1}^{n+1} \le \left(\prod_{j=1}^{n+1}\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{j\}}|\lambda_j-\lambda_i|\right)\times D_n^{n+1} = \prod_{\substack{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2\\ i\ne j}}|\lambda_j-\lambda_i|\times D_n^{n+1} = \left[D(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\right]^2\times D_n^{n+1}$$

Or $D(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) = D_{n+1}$ donc $\underline{D_{n+1}^{n+1} \le D_n^{n+1}\times D_{n+1}^2}$

Dès que les x_i sont deux à deux distincts, on a : $D(x_i,\dots,x_{n+1}) > 0$

Donc, puisque E est infini : $D_{n+1} > 0$

On obtient donc en divisant par D_{n+1} : $\underline{D_{n+1}^{n-1} \le D_n^{n+1}}$

III.A.4) On a : $D_{n+1}^{n-1} \le D_n^{n+1} \Longrightarrow \left(D_{n+1}^{n-1}\right)^{\frac{2}{(n-1)n(n+1)}} \le \left(D_n^{n+1}\right)^{\frac{2}{(n-1)n(n+1)}} \Longrightarrow D_{n+1}^{\frac{2}{n(n+1)}} \le D_n^{\frac{2}{n(n-1)}} \Longrightarrow d_{n+1} \le d_n$

Donc, d'après **III.A.3)**, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ est à termes dans $\mathbb{R}^{*+}$ et décroissante.

Donc $\underline{\text{la suite } (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}} \text{ converge.}}$

III.B.1) On a montré en **I.B.3)** : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in \mathcal{P}_n \quad \mu(P) = \underset{-1\le x\le 1}{Sup} |P(x)| \ge \underset{-1\le x\le 1}{Sup} |f_n(x)| = \mu(f_n)$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \mu_n = \underset{P\in\mathcal{P}_n}{Inf}\ \mu(P) \ge \mu(f_n) \ge \mu_n$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \mu_n = \mu(f_n)$ or $\mu(f_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (cf. **I.A.6**)

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \underline{m_n = \sqrt[n]{\mu_n} = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{1/n} = \dfrac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}}}$

III.B.2) Immèdiatement : $\underline{m = \underset{n\to+\infty}{lim}\ m_n = \underset{n\to+\infty}{lim}\ \dfrac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{2}}$

III.B.3) • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle.

Soit alors ε fixé dans $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit alors n_0 fixé dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, n \in [\![n_0, +\infty[\![\quad |u_n| \le \varepsilon$

Alors : $\forall\, n \in [\![n_0, +\infty[\![\quad \left|\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k}{n(n+1)}\right| \le \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} k\,|u_k|}{n(n+1)} \dfrac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} k\,|u_k|}{n(n+1)} \le \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} k\,|u_k|}{n(n+1)} \varepsilon \times \dfrac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} k}{n(n+1)}$

Soit donc n_1 fixé dans $[\![n_0, +\infty[\![$ tel que : $\forall\, n \in [\![n_1, +\infty[\![\quad \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} k\,|u_k|}{n(n+1)} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ (C'est possible car le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$)

Alors : $\forall\, n \in [\![n_1, +\infty[\![\quad \left|\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k}{n(n+1)}\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \dfrac{\varepsilon}{n(n+1)} \times \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{\varepsilon}{2} \dfrac{\varepsilon}{n(n+1)} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \varepsilon.$

Donc la suite $\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

• Soit maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite l.

Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_n - l$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k}{n(n+1)} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(v_k + l)}{n(n+1)} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,v_k}{n(n+1)} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,l}{n(n+1)} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,v_k}{n(n+1)} \dfrac{l}{n(n+1)} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$= \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,v_k}{n(n+1)} \dfrac{l}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{l}{2}$$ d'après le premier alinéa.

Donc : <u>si la suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l alors la suite $\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{l}{2}$.</u>

III.C.1) Soit $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ un élément de E^{n+1} et P un élément de $\mathcal{P}_n$; posons : $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On ne change pas la valeur de $V(x_1,\ldots,x_{n+1})$ en ajoutant à sa dernière ligne la première multipliée par a_0, la seconde multipliée par a_1, et ainsi de suite jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ multipliée par a_{n-1}.

On obtient ainsi : $V(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_1^k & \cdots & x_{n+1}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{n+1}^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \cdots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$

Donc : $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in \mathcal{P}_n,\ \forall\, (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n+1} \quad V(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \cdots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}}$

III.C.2) Soient n un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ un élément de E^{n+1} et P un élément de $\mathcal{P}_n$.

En développant le déterminant obtenu en **III.C.1** par rapport à sa dernière ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} V(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} P(x_k) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_{k+1} & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{k-1}^{n-1} & x_{k+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} P(x_k)\, V(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc : $$\begin{aligned} D(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \prod_{1\le i<j\le n+1} |\lambda_j - \lambda_i| = \Big|\prod_{1\le i<j\le n+1} (\lambda_j - \lambda_i)\Big| = \big|V(x_1,\ldots,x_{n+1})\big| \\ &= \Big|\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} P(x_k)\, V(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_{n+1})\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{n+1} \big|P(x_k)\big| \times \big|V(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_{n+1})\big| = \sum_{k=1}^{n+1} \big|P(x_k)\big| \times D(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \forall\, P \in \mathcal{P}_n,\ \forall\, (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n+1} \quad D(x_1,\ldots,x_{n+1}) \le \sum_{k=1}^{n+1} \mu(P)\, D_n = (n+1)\,\mu(P)\, D_n$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \forall\, P \in \mathcal{P}_n \quad D_{n+1} \le (n+1)\,\mu(P)\, D_n$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad D_{n+1} \le (n+1)\,\mu_n\, D_n = (n+1)\, m_n^n\, D_n$.

Donc : $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \le (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}\, m_n^n.}$

III.C.3) Soient n fixé dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ fixé dans E^{n+1}. Posons : $\quad P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.

Par définition de D_{n+1} on a : $\quad D_{n+1} \geq D(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

D'après le début de **III.C.2)**, puisque $P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0$ on a : $\quad D(x_1, .., x_{n+1}) = \left|P(x_{n+1}) \times V(x_1, .., x_n)\right|$
$= \left|P(x_{n+1})\right| \times D(x_1, .., x_n)$

Donc : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \forall\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \quad D_{n+1} \geq \left|P(x_{n+1})\right| \times D(x_1, \ldots, x_n)$

Donc : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad D_{n+1} \geq \underset{x_{n+1} \in E}{Sup} \left|P(x_{n+1})\right| \times \underset{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n}{Sup} D(x_1, \ldots, x_n) = \mu(P) \times D_n \geq \mu_n \times D_n$

Donc : $\quad \underline{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \geq m_n^n \times d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

III.C.4) D'après **III.C.3)** : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad m_n^n \times d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

D'après **III.A.4)** : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad 0 < d_{n+1} < d_n$

Donc : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad m_n^n \leq \dfrac{d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}+n}}{d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \left(\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times d_{n+1}^n \leq d_{n+1}^n$

Donc : $\quad \underline{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad m_n \leq d_{n+1}}$

III.C.5) D'après **III.C.2)** : $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad \dfrac{k(k+1)}{2}\, ln\, d_{k+1} \;\leq\; ln\,(k+1)\dfrac{k(k-1)}{2}\, ln\, d_k k\, ln\, m_k$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} k\, ln\, m_k \sum_{k=2}^{n} ln\,(k+1) &\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k+1)}{2}\, ln\, d_{k+1} \;-\; \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}\, ln\, d_k \\ &\geq \sum_{k'=3}^{n+1} \frac{(k'-1)k'}{2}\, ln\, d_{k'} \;-\; \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}\, ln\, d_k \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2}\, ln\, d_{n+1} \;-\; ln\, d_2 \end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad \dfrac{1}{2}\, ln\, d_{n+1} \;\leq\; \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k\, ln\, m_k}{n(n+1)} \;-\; \dfrac{ln\, m_1}{n(n+1)} \dfrac{\sum_{k=2}^{n} ln\,(k+1)}{n(n+1)} \dfrac{ln\, d_2}{n(n+1)}$

Or :
- d'après **III.A.4)** : la suite $\big(d_n\big)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ converge vers d,

  d'après **III.B.2)** : la suite $\big(m_n\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$,

  d'après **III.C.4)** : $\dfrac{1}{2} \;=\; m \;=\; \lim\limits_{n \to +\infty} m_n \;\leq\; \lim\limits_{n \to +\infty} d_{n+1} \;=\; d$,

  donc la suite $\big(ln\, d_{n+1}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $ln\, d$;
- d'après **III.B.3)** : la suite $\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k\, ln\, m_k}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{ln\, m}{2}$;
- d'évidence, les suites $\left(\dfrac{ln\, m_1}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{ln\, d_2}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 ;
- de plus : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad 0 < \dfrac{\sum_{k=2}^{n} ln\,(k+1)}{n(n+1)} \;\leq\; \dfrac{n\, ln\,(n+1)}{n(n+1)} \;=\; \dfrac{ln\,(n+1)}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

  donc la suite $\left(\dfrac{\sum_{k=2}^{n} ln\,(k+1)}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ converge vers 0.

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{1}{2}\, ln\, d \;\leq\; \dfrac{1}{2}\, ln\, m$ donc $\underline{d \;\leq\; m.}$

Or on a vu comme conséquence de **III.C.4)** $m \;\leq\; d$, on a donc $\underline{d \;=\; m \;=\; \dfrac{1}{2}\cdot}$