

**EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS  
PH-M, PH-P**

Epreuve de la banque de notes pour : L'ISIMA - L'ECOLE NAVALE - L'ESM ST CYR

**MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures

---

**Présentation du problème**

Ce problème a pour but d'étudier le groupe  $G$  des endomorphismes orthogonaux de déterminant  $+1$  d'un espace euclidien  $E$  de dimension 4 sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels. La méthode choisie pour cette étude est fondée sur les propriétés des quarts de tour, dont la définition est donnée au début de la partie A de ce problème : la partie B est consacrée à des propriétés des quarts de tour plus subtiles que celles déjà traitées dans A : et leurs conséquences pour le groupe  $G$  apparaissent dans la partie finale C.

Les notations suivantes sont utilisées tout au long du problème. L'application identique de  $E$  est notée  $\text{id}$ , tandis que la matrice unité d'ordre 4 est notée  $I$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est noté  $x \cdot y$  ; la norme (ou longueur)  $\sqrt{x \cdot x}$  du vecteur  $x$  est notée  $\|x\|$ . L'ensemble des vecteurs normés (ou unitaires)  $u$  est noté  $U$  ; il est clair que  $g(U) = U$  pour tout  $g$  dans  $G$ . L'ensemble des bases orthonormées de  $E$  est noté  $\mathfrak{B}$ . Les sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension 1, 2, 3 sont respectivement appelés droites, plans, hyperplans.

**Vous pouvez considérer les assertions suivantes comme connues ou évidentes et vous dispenser de toute explication ou démonstration à leur sujet. Un sous-espace vectoriel  $E'$  de  $E$  est dit invariant par l'endomorphisme orthogonal  $g$  si  $g(E') = E'$  ; cette égalité est équivalente à l'inclusion  $g(E') \subset E'$ , puisque  $g$  est bijectif ; si  $g$  laisse  $E'$  invariant, il laisse aussi invariant son orthogonal  $E''$ , et son déterminant est égal au produit des déterminants de ses restrictions à  $E'$  et à  $E''$ . L'orthogonal d'une droite (resp. d'un plan, d'un hyperplan) est un hyperplan (resp. un plan, une droite). Étant données deux bases orthonormées, il existe un unique endomorphisme orthogonal qui transforme la première en la seconde.**

On vous recommande de faire des calculs clairs et lisibles, d'autant plus qu'il n'est nulle part indispensable de faire de longs calculs. On préfère que vous ne recopiez aucune partie de l'énoncé, mais que vous mettiez en évidence les numéros des questions traitées, en les écrivant en entier, c'est-à-dire A1, A2a, A2b, A3a, A3b, etc...

**A) Les quarts de tour.**

Un endomorphisme orthogonal  $q$  de  $E$  est appelé un quart de tour si  $q^2 = -\text{id}$  ; on note  $Q$  l'ensemble des quarts de tour de  $E$ .

A1) Démontrez qu'un quart de tour transforme tout vecteur  $x$  de  $E$  en un vecteur orthogonal à  $x$ .

A2) Dans tout ce problème la lettre  $M$  désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A2a) Soit  $q$  un endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans une base orthonormée est égale à  $M$  ; démontrez que  $q$  est un quart de tour.

A2b) Si  $q$  est un quart de tour, on note  $\mathfrak{B}(q)$  l'ensemble des bases orthonormées de  $E$  dans lesquelles la matrice de  $q$  est égale à  $M$ . Démontrez que quel que soit  $u$  dans  $U$ , il existe  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  dans  $\mathfrak{B}(q)$  tel que  $b_1 = u$ .

A3) Soient  $q$  dans  $Q$  et  $u$  dans  $U$  ; on note  $P$  le plan engendré par  $u$  et  $q(u)$  ; il est clair que  $(u, q(u))$  est une base orthonormée de  $P$ .

A3a) Démontrez que le plan  $P$  est invariant par  $q$  ; quelle est la nature géométrique de la restriction de  $q$  à  $P$  ?

A3b) Si  $v$  est un vecteur normé dans  $P$ , il existe un nombre réel  $\theta$  tel que  $v = u \cos \theta + q(u) \sin \theta$  ; quelles sont les matrices de passage de la base  $(u, q(u))$  à la base  $(v, q(v))$ , et vice-versa ?

A4) Soient  $q$  dans  $Q$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  ; on pose  $f = \text{id} \cos \alpha + q \sin \alpha$ .

A4a) Démontrez que  $f$  est un endomorphisme orthogonal.

A4b) Démontrez que tout vecteur normé  $u$  est contenu dans un plan  $P$  invariant par  $f$  ; quelle est la nature géométrique de la restriction de  $f$  à  $P$  ?

## Mathématiques 1 3/7

A4c) Quel est le déterminant de  $f$  ?

A5) Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $\sin \alpha \neq 0$  ; on pose  $L = I \cos \alpha + M \sin \alpha$ , et l'on s'intéresse à l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^4$  (espace vectoriel de dimension 4 sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes) dont la matrice dans la base canonique est égale à  $L$ .

A5a) Trouvez un polynôme  $A(\lambda)$  de degré 2 tel que  $A(L) = 0$ . Déduisez-en les valeurs propres de  $L$  (dans le corps  $\mathbb{C}$ ) et son polynôme caractéristique.

A5b) Déduisez-en encore les dimensions des sous-espaces propres.

### B) Orientations et commutations.

Le fait que les endomorphismes orthogonaux de  $E$  ont un déterminant égal tantôt à  $+1$  et tantôt à  $-1$ , permet de décomposer  $\mathfrak{B}$  en réunion disjointe de deux sous-ensembles  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$ , de la façon suivante : on choisit arbitrairement  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  dans  $\mathfrak{B}$ , et l'on définit  $\mathfrak{B}^+$  comme l'ensemble des bases  $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ , où  $g$  est un élément quelconque de  $G$  ; ensuite  $\mathfrak{B}^-$  est le complémentaire de  $\mathfrak{B}^+$  dans  $\mathfrak{B}$ .

Le choix de la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  peut être compris comme le choix d'une orientation de  $E$ , comme cela se fait habituellement pour des espaces euclidiens de dimension  $\leq 3$ .

L'objectif de cette partie B est de démontrer les deux théorèmes suivants :

**Premier théorème** : l'ensemble  $\mathfrak{B}(q)$  défini dans A2b est tout entier contenu dans  $\mathfrak{B}^+$  ou dans  $\mathfrak{B}^-$ .

On notera  $Q^+$  (resp.  $Q^-$ ) l'ensemble des quarts de tour  $q$  tels que  $\mathfrak{B}(q)$  est contenu dans  $\mathfrak{B}^+$  (resp.  $\mathfrak{B}^-$ ).

**Second théorème** : tout élément  $p$  de  $Q^+$  commute avec tout élément  $q$  de  $Q^-$  (c'est-à-dire  $p \circ q = q \circ p$ ) ; mais deux éléments du même sous-ensemble  $Q^+$  ou  $Q^-$  ne commutent jamais, sauf si ils sont égaux ou opposés.

Les deux théorèmes seront démontrés simultanément.

B1) Soient  $q$  dans  $Q$  et  $u$  dans  $U$  ; soient  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  et  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  deux éléments de  $\mathfrak{B}(q)$  tels que  $b_1 = c_1 = u$  ; démontrez qu'ils sont tous les deux dans  $\mathfrak{B}^+$  ou dans  $\mathfrak{B}^-$ . Ceci justifie la définition d'une application  $S$  de  $Q \times U$  dans l'ensemble  $\{+1, -1\}$ , qui à  $(q, u)$  associe  $+1$  ou  $-1$  selon que les éléments  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  de  $\mathfrak{B}(q)$  tels que  $b_1 = u$ , sont tous dans  $\mathfrak{B}^+$  ou tous dans  $\mathfrak{B}^-$  ;  $S(q, u)$  est appelé le signe de  $q$  en  $u$ , et le fait que ce signe ne dépend pas de  $u$ , apparaîtra seulement en B7.

B2) On va établir quelques propriétés simples de l'application  $S$  définie ci-dessus.

B2a) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs normés orthogonaux ; démontrez l'existence de quarts de tour  $q$  et  $q'$  tels que

$$\begin{array}{lll} q(u) = v & \text{et} & S(q, u) = 1, \\ q'(u) = v & \text{et} & S(q', u) = -1. \end{array}$$

B2b) Il est évident que  $-q$  est un quart de tour chaque fois que  $q$  en est un ; comparez  $S(q, u)$  et  $S(-q, u)$ .

B2c) Soit toujours  $(q, u)$  dans  $Q \times U$  et soit  $v$  un vecteur normé dans le plan engendré par  $u$  et  $q(u)$  ; comparez  $S(q, u)$  et  $S(q, v)$ .

B3) Dans les sections B3, B4 et B5 on considère deux quarts de tour  $p$  et  $q$ , on suppose connus  $S(p, u)$  et  $S(q, u)$  pour un certain élément  $u$  de  $U$ , et l'on cherche à savoir si  $p$  et  $q$  commutent.

Ici, dans B3, on traite le cas où  $p(u) = q(u)$ .

B3a) Démontrez que ceci implique  $p = q$  si  $S(p, u) = S(q, u)$ .

B3b) Si au contraire  $S(p, u) = -S(q, u)$ , démontrez que  $E$  est somme directe orthogonale de deux plans  $P$  et  $P'$  invariants par  $p$  et  $q$ , tels que  $p(x) = q(x)$  pour tout  $x$  dans  $P$ , et  $p(x) = -q(x)$  pour tout  $x$  dans  $P'$  ; est-ce que  $p$  et  $q$  commutent ?

B4) Soient encore  $p$  et  $q$  dans  $Q$  et  $u$  dans  $U$  ; on suppose ici que  $p(u) = -q(u)$ . Quels résultats analogues à ceux de B3 pouvez-vous énoncer maintenant ? On vous suggère d'utiliser B2b.

B5) Soient encore  $p$  et  $q$  dans  $Q$  et  $u$  dans  $U$  ; on suppose  $u$ ,  $p(u)$  et  $q(u)$  linéairement indépendants (hypothèse contraire de celles de B3 et B4).

## Mathématiques 1 5/7

B5a) Démontrez qu'il existe  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  dans  $\mathfrak{B}(p)$  et  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  dans  $\mathfrak{B}(q)$  tels que  $b_1 = c_1 = u$  et  $b_3 = c_3$  ; démontrez l'existence d'un nombre réel  $\alpha$  tel que

$$\begin{aligned} c_2 &= b_2 \cos \alpha + b_4 \sin \alpha && \text{avec } \sin \alpha \neq 0, \\ c_4 &= \pm (-b_2 \sin \alpha + b_4 \cos \alpha) ; \end{aligned}$$

précisez le signe  $\pm$  dans l'égalité précédente selon que  $S(p, u)$  et  $S(q, u)$  sont égaux ou opposés.

B5b) Comparez  $p(q(u))$  et  $q(p(u))$  lorsque  $S(p, u) = S(q, u)$ .

B5c) Lorsque  $S(p, u) = -S(q, u)$ , démontrez l'existence de vecteurs normés  $v$  tels que  $p(v) = q(v)$  ; on vous suggère de chercher un tel vecteur  $v$  parmi ceux de la forme  $b_1 \cos \theta + b_3 \sin \theta$ .

Est-ce que  $p$  et  $q$  commutent ?

B6) Soient  $p$  et  $q$  deux quarts de tour qui ne commutent pas, et soit  $u$  dans  $U$  ; comparez  $S(p, u)$  et  $S(q, u)$ .

B7) La démonstration des deux théorèmes énoncés au début de cette partie B s'achève avec la démonstration du fait que  $S(q, u)$  ne dépend pas de  $u$ . L'égalité  $S(q, u) = S(q, v)$  a dû être démontrée dans B2c lorsque  $v$  est dans le plan engendré par  $u$  et  $q(u)$ .

Supposez maintenant  $u, v$  et  $q(u)$  linéairement indépendants, construisez un quart de tour  $p$  tel que

$$S(q, u) = S(p, u) = S(p, v).$$

et utilisez B6 pour comparez  $S(q, u)$  et  $S(q, v)$ .

**C) Les sous-groupes  $F^+$  et  $F^-$ .**

On note  $F^+$  (resp.  $F^-$ ) l'ensemble des endomorphismes  $f$  de  $E$  qui peuvent s'écrire  $\text{id} \cos \alpha + q \sin \alpha$ , où  $\alpha$  est un nombre réel et  $q$  un élément de  $Q^+$  (resp.  $Q^-$ ). Le fait que  $F^+$  et  $F^-$  sont des sous-ensembles de  $G$ , a dû être démontré dans A4.

C1) Démontrez que tout élément de  $F^+$  commute avec tout élément de  $F^-$ .

C2) Soient  $u$  et  $v$  dans  $U$  ; démontrez l'existence de  $f$  dans  $F^+$  et de  $f'$  dans  $F^-$  tels que  $f(u) = f'(u) = v$  ; rappelez-vous que ceci a déjà été démontré dans B2a lorsque  $u$  et  $v$  sont orthogonaux ; par ailleurs ne vous souciez pas ici de l'unicité de  $f$  et  $f'$  ( $u$  et  $v$  étant donnés), car elle sera démontrée plus loin dans C4.

C3) Si  $F$  est un sous-ensemble non vide de  $G$ , on note  $C(F)$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous ceux de  $F$  ;  $C(F)$  s'appelle le commutant de  $F$  dans  $G$ .

C3a) Démontrez que  $C(F)$  est un sous-groupe de  $G$ .

C3b) Soit  $u$  un élément fixé dans  $U$  ; on dit que  $F$  est transitif à partir de  $u$ , si quel que soit  $v$  dans  $U$ , il existe  $f$  dans  $F$  tel que  $f(u) = v$ . Démontrez que si  $F$  est transitif à partir de  $u$ , deux éléments  $f'$  et  $f''$  de  $C(F)$  tels que  $f'(u) = f''(u)$ , sont nécessairement égaux.

C3c) On suppose que  $F$  et  $F'$  sont deux sous-ensembles de  $G$  transitifs à partir de  $u$ , et que tout élément de  $F$  commute avec tout élément de  $F'$ . Démontrez que  $C(F) = F'$  et  $C(F') = F$ .

C4) Démontrez que  $F^+$  et  $F^-$  sont des sous-groupes de  $G$ , et que, quels que soient  $u$  et  $v$  dans  $U$ , il existe un unique  $f$  dans  $F^+$  et un unique  $f'$  dans  $F^-$  tels que  $f(u) = f'(u) = v$ .

C5) Soit  $F^+ \circ F^-$  le sous-ensemble de  $G$  formé par les produits (commutatifs) d'un élément de  $F^+$  et d'un élément de  $F^-$  ; le prochain objectif est de démontrer que  $F^+ \circ F^- = G$ .

C5a) Soit  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  dans  $\mathcal{B}^+$ , et soient  $q$  et  $q'$  les quarts de tour qui ont pour matrice  $M$  dans les bases  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  et  $(b_1, b_2, b_3, -b_4)$  respectivement ; on pose

$$g = (\text{id} \cos \alpha + q \sin \alpha) \circ (\text{id} \cos \alpha - q' \sin \alpha) ;$$

démontrez que  $E$  est somme directe orthogonale de deux plans invariants par  $g$  ; quelles sont les restrictions de  $g$  à ces deux plans ?

C5b) On suppose qu'un élément  $g$  de  $G$  laisse invariant un certain vecteur normé  $u$  ; démontrez que  $g$  laisse invariants tous les vecteurs d'un plan contenant  $u$ , et que  $g$  est dans  $F^+ \circ F^-$ .

C5c) Démontrez que tout élément  $g$  de  $G$  est dans  $F^+ \circ F^-$  ; on vous suggère de démontrer qu'il existe  $f$  dans  $F^+$  tel que  $f \circ g$  laisse invariant un vecteur normé  $u$ .

C6) Soit  $g$  dans  $G$  et soit  $(\varphi, \psi)$  dans  $F^+ \times F^-$  tel que  $g = \varphi \circ \psi$  ; le prochain objectif est de trouver tous les couples  $(f, f')$  dans  $F^+ \times F^-$  tels que  $g = f \circ f'$  ; il est clair qu'on obtient un tel couple  $(f, f')$  en posant  $f = \varphi \circ h$  et  $f' = h^{-1} \circ \psi$ , chaque fois que  $h$  est dans l'intersection de  $F^+$  et  $F^-$ .

C6a) Quels sont les éléments  $h$  de cette intersection ?

C6b) Quels sont les couples  $(f, f')$  dans  $F^+ \times F^-$  tels que  $g = f \circ f'$  ?

Fin de l'énoncé.