Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques
Centrale 2009 - Filière TSI
Par H. Maarouf CPGE Mohammedia

Partie I - Matrices symétriques

I.A) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

II.A.1) Le polynôme caractéristique de A est P_A donné par :

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - c & -d \\ -e & \lambda - f \end{vmatrix} = \lambda^2 - (c+f)\lambda + cf - ed$$

Donc $P_A(X) = X^2 - (c+f)X + cf - ed = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

I.A.2) On sait encore que $P_A(X) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres (réelles ou complexes) de A. Donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$.

I.A.3) La matrice A est supposée symétrique, donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres, λ_1 et λ_2, sont réelles. D'après la question précédente, si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Supposons maintenant que $\text{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. Puisque $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, λ_1 et λ_2 sont non nulles et ont même signe qui est aussi le signe de $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. Donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

I.B) Pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, on note $M_{i,j}$ la matrice, appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls sauf $m_{i,j} = m_{j,i} = 1$.

I.B.1) On suppose que $n = 3$.

a) Les six matrices $M_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$ sont :

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Une matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ quelconque s'écrit :

$$A = aM_{1,1} + bM_{1,2} + cM_{1,3} + dM_{2,2} + eM_{2,3} + fM_{3,3}$$

Les 6 matrices forment donc une famille génératrice de $S_3(\mathbb{R})$. En plus, si a, b, c, d, e, f sont des réels tels que $aM_{1,1} + bM_{1,2} + cM_{1,3} + dM_{2,2} + eM_{2,3} + fM_{3,3}$ soit la matrice nulle, alors

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ces 6 réels sont alors nuls et la famille est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.B.2) On revient au cas général : $n \geqslant 2$.

a) Ces matrices $M_{i,j}$ sont en nombre fini (indexées par un ensemble fini). Notons s leur nombre. On a :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textit{(somme des termes d'une suite arithmétique)} \end{aligned}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On a : $A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j}$ où $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique (formée des matrices élémentaires) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $M_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $M_{i,i} = E_{i,i}$. Avec $a_{i,j} = a_{j,i}$, on aura :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{1 \leqslant j<i \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{j,i} E_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} M_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{i,j} M_{j,i} \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} M_{j,i}
\end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, les matrices $M_{i,j}$ forment une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$. En plus, d'après le calculs ci-dessus, une combinaison linéaire des matrices $M_{i,j}$ de type $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} M_{j,i}$, avec $a_{i,j}$ des réels, est nulle si et seulement si la matrice $(b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nulle, avec $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $i \leqslant j$ et $b_{i,j} = a_{j,i}$ sinon. Les matrices $M_{i,j}$ forment aussi une famille libre. C'est donc une base de $S_n(\mathbb{R})$. Le cardinal de cette base qui, d'après la question **a)**, est $\frac{n(n+1)}{2}$ est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.

I.C) Un élément V de $\mathbb{R}^n$ sera identifié à un vecteur colonne à n lignes. On note ${}^tV$ le transposé d'un tel vecteur. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall\, V \in \mathbb{R}^n$, $q(V) = {}^tVAV$.

I.C.1) Fixons V, V' de $\mathbb{R}^n$. On remarque que ${}^tV'AV$ est réel et donc égal à son transposé ${}^tV{}^tAV' = {}^tVAV'$. Par suite,

$$\begin{aligned}
q(V+V') &= {}^t(V+V')A(V+V') \\
&= {}^tVAV + {}^tV'AV + {}^tVAV' + {}^tV'AV' \\
&= q(V) + q(V') + 2{}^tVAV'
\end{aligned}$$

Donc ${}^tVAV' = \dfrac{1}{2}(q(V+V') - q(V) - q(V'))$

I.C.2) Il suffit de prendre $V = E_i$ et $V' = E_j$ avec $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, ${}^tVAV' = a_{i,j}$.

I.C.3) Posons $A = A_1 - A_2$, qui est une matrice symétrique car A_1 et A_2 sont symétriques, et fixons i, j entre 1 et n. L'assertion $\forall\, V \in \mathbb{R}^n$, ${}^tVA_1V = {}^tVA_2V$ se traduit par $\forall\, V \in \mathbb{R}^n$, $q(V) = {}^tVAV = O$. En, particulier, $q(E_i) = q(E_j) = q(E_i + E_j) = 0$. D'après **I.C.1)**, ${}^tE_iAE_j = \frac{1}{2}(q(E_i+E_j) - q(E_i) - q(E_j)) = 0$ et d'après **I.C.2)**, $a_{i,j} = {}^tE_iAE_j = 0$. Donc A est nulle et $A_1 = A_2$.

I.C.4) Soient A_1 et A_2 deux matrices dans $S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A_1 sont strictement positives et que pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, tel que ${}^tVA_1V = 1$, on ait ${}^tVA_2V = 1$. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ non nul.

a) La matrice A_1 étant symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, il existe P une matrice orthogonale, ${}^tPP = I_n$, telle que ${}^tPA_1P = D$, où D est la matrice diagonale ayant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme termes diagonaux. Posons ${}^tPW = V$, c'est à dire $V = PW$. Alors,

$${}^tVA_1V = {}^t(PW)A_1PW = {}^tW{}^tPA_1PW = {}^tWDW$$

Puisque P est orthogonale (donc inversible) et V non nul, W est aussi non nul.

b) Soit W non nul tel que ${}^tVA_1V = {}^tWDW$. Posons ${}^tW = (w_1, \dots, w_n)$ et fixons k tel que $w_k \neq 0$. Alors, puisque les λ_i sont strictement positives et $w_k \neq 0$, on aura :

$${}^tVA_1V = {}^tWDW = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 \;\geqslant\; \lambda_k w_k^2 > 0$$

Ce nombre strictement positif est noté r^2.

c) On a ${}^t(\frac{1}{r}V)A_1(\frac{1}{r}V) = \frac{1}{r^2}{}^tVA_1V = \frac{1}{r^2}r^2 = 1$. Par l'hypthèse mentionnée au début de cette question **I-C.4)**, on aura ${}^t(\frac{1}{r}V)A_2(\frac{1}{r}V) = 1$ et, par suite, ${}^tVA_2V = r^2$. En conclusion, ${}^tVA_1V = {}^tVA_2V$.

d) Par la question **I-C.4.c)**, ${}^tVA_1V = {}^tVA_2V$ pour tout vecteur V non nul de $\mathbb{R}^n$. Cette égalité est encore vrai de façon claire pour le vecteur nul. La question **I-C.3)** montre alors que $A_1 = A_2$.

Partie II - Quelques propriétés de l'ellipse.

À tout endomorphisme f de $(\overrightarrow{\Pi})$ on associe la courbe $\mathcal{C}_f$, ensemble des points M de Π tels que $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = 1$.

II.A) -

II.A.1) L'endomorphisme f est symétrique, donc $(\overrightarrow{\Pi})$ admet une base orthonormale $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs propres de f. Soient $\overrightarrow{\imath_0}$ et $\overrightarrow{\jmath_0}$ définis par : $\overrightarrow{\imath_0} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\jmath_0} = \begin{cases} \overrightarrow{v} & \text{si } B \text{ directe,} \\ -\overrightarrow{v} & \text{sinon.} \end{cases}$ La famille $(\overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$ est une base orthonormale directe de $(\overrightarrow{\Pi})$ et formeée de vecteurs propres de f. Posons $f(\overrightarrow{\imath_0}) = \lambda_1\overrightarrow{\imath_0}$ et $f(\overrightarrow{\jmath_0}) = \lambda_2\overrightarrow{\jmath_0}$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$. Alors,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_f &\iff \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = 1 \\ &\iff (x\overrightarrow{\imath_0} + y\overrightarrow{\jmath_0}) \cdot (\lambda_1 x\overrightarrow{\imath_0} + \lambda_2 y\overrightarrow{\jmath_0}) = 1 \\ &\iff \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1 \end{aligned}$$

II.A.2) Si $\lambda_1 \leqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$, d'après son équation, la courbe $\mathcal{C}_f$ est vide. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$, d'après son équation, la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'union des deux droites d'équations $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$. Même discussion si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ aura pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole. Même discussion si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$. Dans tous ces cas, $\mathcal{C}_f$ n'est pas une ellipse. Si maintenant si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ aura pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est bien une ellipse.

II.B) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse dans le plan Π.

II.B.1) L'ellipse $\mathcal{E}$ a pour éqaution $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$ de Π. Cette équation se traduit par $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$ avec $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$. Soit f l'endomorphisme de $(\overrightarrow{\Pi})$ ayant $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ comme matrice dans la base $B = (\overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$. Cet endomorphisme admet λ_1 et λ_2 comme valeurs propres et elles sont strictement positives. Maintenant si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath_0} + y\overrightarrow{\jmath_0}$ et $\overrightarrow{v} = s\overrightarrow{\imath_0} + t\overrightarrow{\jmath_0}$ sont deux éléments de $(\overrightarrow{\Pi})$, alors :

$$f(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = (\lambda_1 x\overrightarrow{\imath_0} + \lambda_2 y\overrightarrow{\jmath_0}) \cdot (s\overrightarrow{\imath_0} + t\overrightarrow{\jmath_0}) = \lambda_1 xs + \lambda_2 yt$$

de la même façon, on trouve $\overrightarrow{u} \cdot f(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 xs + \lambda_2 yt$. Donc f est un endomorphisme symétrique et en particulier, pour tout M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$, on a

$$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}_f$.

II.B.2) On conserve les notations de la question précédente. Supposons que g est un endomorphisme symétrique et $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$. Notons A_1 et A_2 les matrices dans B de f et g, respectivement. Puisque, g est symétrique et B est orthonormale, la matrice A_2 est symétrique. En plus, les valeurs propres de A_1 sont strictement positives. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que ${}^tVA_1V = 1$ et M le point du plan de coordonnées ${}^tV = (x, y)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$. Puisque ${}^tVA_1V = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM})$, $M \in \mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$. Par suite, $\overrightarrow{OM} \cdot g(\overrightarrow{OM}) = 1$. D'une autre part, puisque ${}^tV$ et ${}^t(A_2V)$ sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OM}$ et $g(\overrightarrow{OM})$ dans B qui est orthonormale, on aura ${}^tVA_2V = 1$ et, par la question **I-C.4)**, $A_1 = A_2$.

II.C) Soit f un endomorphisme symétrique de $(\overrightarrow{\Pi})$ et M_f sa matrice dans $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

II.C.1) Soient a, b et c trois réels tels que la matrice $aA + bB + cC$ soit nulle, où :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire : $\begin{pmatrix} c-a & -b \\ -b & c+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $a = b = c = 0$ et, par suite, la famille (A, B, C) est libre. En plus, ces trois matrices sont symétriques.

II.C.2) Le sous-espace $S_2(\mathbb{R})$ est de dimension $3 = \frac{2\times 3}{2}$ et la famille formée des trois matrices A, B, C est libre, c'est donc une base de $S_2(\mathbb{R})$. La matrice M_f étant symétrique car f est symétrique et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est orthonormale, donc il existe un unique trilplet (α, β, γ) de réels tels que : $M_f = \alpha A + \beta B + \gamma C$ ou encore : $M_f = \begin{pmatrix} \gamma-\alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma+\alpha \end{pmatrix}$.

III.C.3) L'endomorphisme f et sa matrice M_f ont, les mêmes valeurs propres, la même trace et le même déterminant. Donc d'après la question **I-A.3)**, f admet deux valeurs propres réelles et strictement positives si et seulement si $\text{tr}(f) = 2\gamma > 0$ et $\det(f) = \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 > 0$ c'est à dire si et seulement si $\gamma > 0$ et $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$

II.D) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, dans le plan Π et f l'unique endomorphisme symétrique de $(\overrightarrow{\Pi})$ qui lui est associé. Soit (α, β, γ) le triplet associé à f.

II.D.1) On sait que les valeurs propres, λ_1 et λ_2, de f sont strictement positives, et ceci d'après la question **II-A)**. En plus, il existe une base orthonormale directe $(\overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$ de $(\overrightarrow{\Pi})$ formée de vecteurs propres de f. On sait, pour un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$, que $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$. D'un autre coté, les points de l'intérieur sont ceux dont les coordonnées dans ce repère vérifient $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) < 1$. Donc les points de $\mathcal{E}$ ou de son intérieur sont ceux qui vérifient : $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) \leqslant 1$.

II.D.2) Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) &= (x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath})) \cdot ((\gamma-\alpha)x - \beta y)\overrightarrow{\imath} + (-\beta x + (\gamma+\alpha)y)\overrightarrow{\jmath} \\ &= x((\gamma-\alpha)x - \beta y) + y(-\beta x + (\gamma+\alpha)y) \\ &= (\gamma-\alpha)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 - 2\beta xy \end{aligned}$$

Donc les points de l'ellipse ou de son intérieur sont ceux dont les coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ vérifient : $(\gamma-\alpha)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 - 2\beta xy \leqslant 1$.

II.D.3) Dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0})$, $\mathcal{E}$ a pour équation $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, où λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres (strictement positives de f) associée respectivement aux deux vecteurs propres $\overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0}$. L'aire de $\mathcal{E}$ est donc $\mathcal{A} = \pi ab$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. Donc

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{\sqrt{la_1}\sqrt{\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(f)}}$$

II.D.4) Le déterminant de f est $\det(f) = \det(M_f) = \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$. Donc $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$

Partie III - Existence d'une ellipse optimale

III.A) -

III.A.1) Supposons que les trois points O, P_i et P_j sont alignés. Supposons par exemple que $OP_i \leqslant OP_j$. Toute ellipse de centre O est symétrique par rapport à O et si elle contient le point P_j alors elle contient aussi le point P_i. La suppression de P_i de $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ ne change pas l'ensemble des ellipses convenables. On suppose alors que pour tous i et j distincts, O, P_i et P_j ne sont pas alignés.

III.A.2) Pour $P_i \in \mathcal{L}$, on pose $\overrightarrow{OP_i} = \rho_i \cos(\theta_i)\overrightarrow{\imath} + \rho_i \sin(\theta_i)\overrightarrow{\jmath}$ avec $\rho_i > 0$.
$\mathcal{E}$ étant une ellipse de centre O associée au triplet (α, β, γ). Le point P_i est à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{E}$ elle même si et seulement si $(\gamma-\alpha)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 - 2\beta xy \leqslant 1$ avec $x = \rho_i \cos(\theta_i)$ et $y = \rho_i \sin(\theta_i)$. C'est à dire : $\rho_i^2((\gamma-\alpha)\cos^2(\theta_i) + (\gamma+\alpha)\sin^2(\theta_i) - 2\beta\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)) \leqslant 1$ ou $\gamma - \alpha\cos(2\theta_i) - \beta\sin(2\theta_i) \leqslant \frac{1}{\rho_i^2}$ ou encore $\gamma \leqslant \alpha\cos(2\theta_i) + \beta\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$

III.A.3) On a l'égalité $\gamma = \alpha\cos(2\theta_i) + \beta\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$ si et seulement si $(\gamma-\alpha)x^2 + (\gamma+\alpha)y^2 - 2\beta xy = 1$ ou encore le point P_i est sur l'ellipse $\mathcal{E}$.

III.B) L'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ qui est le cercle de centre O et de rayon $r = \max(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ est convenable. Dans la suite, $\mathcal{E}_0$ est une ellipse convenable associée au triplet $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

III.C) -

III-C.1) Soit $r \geqslant 1$ et $\mathcal{E}_1$ l'ellipse associée au triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$. L'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{E}_1$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{\sqrt{r^2\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_0^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}} = \text{aire}(\mathcal{E}_0)(\text{ puisque } r \geqslant 1)$$

III.C.2) L'ellipse $\mathcal{E}_0$ étant convenable, alors :

$$\forall\, i \in [\![1,k]\!]\,,\ \gamma_0 \leqslant \alpha_0\cos(2\theta_i) + \beta_0\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$$

Soit $j \in [\![1,k]\!]$ tel que $\alpha_0\cos(2\theta_j) + \beta_0\sin(2\theta_j) + \frac{1}{\rho_j^2} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\left(\alpha_0\cos(2\theta_i) + \beta_0\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}\right)$ et

$$r = \frac{\alpha_0\cos(2\theta_j) + \beta_0\sin(2\theta_j) + \frac{1}{\rho_j^2}}{\gamma_0}$$

Avec ce choix, on aura $r \geqslant 1$ et :

$$\forall\, i \in [\![1,k]\!]\,,\ r\gamma_0 \leqslant \alpha_0\cos(2\theta_i) + \beta_0\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} \text{ et } r\gamma_0 = \alpha_0\cos(2\theta_j) + \beta_0\sin(2\theta_j) + \frac{1}{\rho_j^2}$$

Ceci montre que l'ellipse asociée au triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ est convenable et passe par le point P_j.
On suppose, quitte à réordonner les points $P_1, \ldots, P_k$, que ce point est P_1 et que l'on a choisi la base orthonormale directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de sorte que $\theta_1 = 0$. On note $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ le triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ associé à $\mathcal{E}_1$.

III.D) -

III-D.1) Soit $\lambda \geqslant 0$ et $\mathcal{E}_2$ l'ellipse associée au triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$. Cette ellipse est de centre O et on a :

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{1}{\rho_1^2}$$

car $\mathcal{E}_1$ passe par P_1 et $\theta_1 = 0$. Donc

$$\gamma_1 + \lambda = (\alpha_1 + \lambda) + \frac{1}{\rho_1^2}$$

c'est à dire l'ellipse $\mathcal{E}_2$ passe par P_1. En plus, l'aire $\mathcal{A}_2$ de cette ellipse est donnée par :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{(\gamma_1+\lambda)^2 - (\alpha_1+\lambda)^2 - \beta_1^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 + 2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1)}}$$

et celle de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_1^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}}$. En plus, on sait, d'après la question II-C.3), que $\gamma_1^2 > \alpha_1^2 + \beta_1^2$ et $\gamma_1 > 0$. Donc $2\lambda(\gamma_1 - \alpha_1) \geqslant 0$ et $\mathcal{A}_2 \leqslant \mathcal{A}_1$.

III.D.2) Le réel $1 - \cos(2\theta_i)$ est toujours positif. Si, pour un certain i entre 2 et k, on a $1 - \cos(2\theta_i) = 0$, alors θ_i sera de la forme $u\pi$ pour un certain entier u et les points O, P_1 et P_i seront alignés contrairement à ce qu'on a supposé. Alors, pour tout i de 2 à k, $1 - \cos(2\theta_i)$ est strictement positif.

III.D.3) L'ellipse $\mathcal{E}_1$ étant convanable, alors :

$$\forall\, i \in [\![2,k]\!]\,,\ \gamma_1 \leqslant \alpha_1\cos(2\theta_i) + \beta_1\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$$

Soit alors $\lambda = \min\limits_{2 \leqslant i \leqslant k}\left(\dfrac{\alpha_1\cos(2\theta_i) + \beta_1\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2} - \gamma_1}{1 - \cos 2\theta_i}\right)$, qui est bien défini puisque $1 - \cos 2\theta_i > 0$ pour tout $i \in [\![2,k]\!]$. Avec ce choix, on a $\lambda \geqslant 0$.

$$\forall\, i \in [\![2,k]\!]\,,\ \gamma_1 + \lambda \leqslant (\alpha_1 + \lambda)\cos(2\theta_i) + \beta_1\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$$

L'ellipse $\mathcal{E}_2$ est donc convenable. Fixons maintenant $j \in [\![2, k]\!]$ tel que $\lambda = \dfrac{\alpha_1 \cos(2\theta_j) + \beta_1 \sin(2\theta_j) + \frac{1}{\rho_j^2} - \gamma_1}{1 - \cos 2\theta_j}$.
Alors, $\gamma_1 + \lambda = (\alpha_1 + \lambda)\cos(2\theta_j) + \beta_1 \sin(2\theta_j) + \frac{1}{\rho_j^2}$. L'ellipse $\mathcal{E}_2$ est alors convenable et passe par P_1 et P_j.
De même, on suppose, quitte à réordonner les points $P_2, \dots, P_k$, que ce point est P_2. On note $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ associé à $\mathcal{E}_2$.

III.E) - On étudie l'ensemble des triplets (α, β, γ) qui vérifient :

$$\gamma = \alpha \cos 2\theta_i + \beta \sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2} \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2$$

III-E.1) Avec $\theta_1 = 0$, il suffit de résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \frac{1}{\rho_1^2} \\ \gamma = \alpha \cos 2\theta_2 + \beta \sin 2\theta_2 + \frac{1}{\rho_2^2} \end{cases}$$

dont les solutions sont les triplets (α, β, γ) tels que

$$\alpha = \frac{\beta \sin 2\theta_2 + \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}}{1 - \cos 2\theta_2}, \quad \gamma = \frac{\beta \sin 2\theta_2 + \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}}{1 - \cos 2\theta_2} + \frac{1}{\rho_1^2} \quad \textit{et} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

c'està dire $(g(\beta), \beta, h(\beta))$ avec

$$g(\beta) = \frac{\sin 2\theta_2}{1 - \cos 2\theta_2}\beta + \frac{\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}}{1 - \cos 2\theta_2} \quad \text{et} \quad h(\beta) = g(\beta) + \frac{1}{\rho_1^2}$$

III.E.2) On a $\gamma = \alpha + \frac{1}{\rho_1^2}$, donc $\gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^4}$. Avec la donnée de α en fonction de β, on aura :

$$\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -\beta^2 + \frac{2 \sin 2\theta_2}{(1 - \cos 2\theta_2)\rho_1^2}\beta + \frac{\frac{2}{\rho_2^2} - \frac{2}{\rho_1^2}}{(1 - \cos 2\theta_2)\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^4}$$

qui est bien une fonction du second degré de β, dont le terme de plus haut degré est $-\beta^2$.

III.E.3) Notons

$$T(\beta) = -\beta^2 + \frac{2 \sin 2\theta_2}{(1 - \cos 2\theta_2)\rho_1^2}\beta + \frac{\frac{2}{\rho_2^2} - \frac{2}{\rho_1^2}}{(1 - \cos 2\theta_2)\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^4}$$

de sorte que $T(\beta) = \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$. La fonction T est polynomiale de degré 2, de limite $-\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$. En plus, le triplet $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est associé à l'ellipse $\mathcal{E}_2$ qui passe par P_1 et P_2, donc $T(\beta_2) = \gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 > 0$. Donc l'ensemble des réels β tels que $T(\beta) > 0$ est l'intervalle $]u, v[$ avec $u < v$ les deux racines de T. De même, puisque $\gamma_2 = h(\beta_2) > 0$, l'ensemble D des réels β tels que $h(\beta) > 0$ est une demi-droite ouverte (ou $\mathbb{R}$ si $\sin 2\theta_2 = 0$). Donc $J = D \cap]u, v[$ est un intervalle ouvert, borné et non vide. En résumé, un triplet $(\alpha = g(\beta), \beta, \gamma = h(\beta))$ est associé à une ellipse passant par P_1 et P_2 si et seulement si $\beta \in J$. Rappelons que l'aire $\mathcal{A}_2$ de cette ellipse est donnée par :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{T(\beta_2)}}$$

Donc, un triplet $(\alpha = g(\beta), \beta, \gamma = h(\beta))$ est associé à une ellipse passant par P_1 et P_2 et d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si $\beta \in J$ et $\frac{\pi}{\sqrt{T(\beta)}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{T(\beta_2)}}$ ce qui se traduit par :

$$\beta \in J \text{ et } T(\beta) \geqslant T(\beta_2)$$

D'un autre coté, le graphe de T est une parabole qui atteint sont maximum en $\frac{u+v}{2}$ et l'ensemble des réels β tels que $T(\beta) \geqslant T(\beta_2)$ est le segment $I = [\beta_2, u + v - \beta_2]$ ou $I = [u + v - \beta_2, \beta_2]$. Par suite, un triplet $(\alpha = g(\beta), \beta, \gamma = h(\beta))$ est associé à une ellipse passant par P_1 et P_2 et d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si $\beta \in J \cap I$. Ce dernier, $I \cap J$ est un segment non vide car il contient β_2. Enfin, ce triplet $(\alpha = g(\beta), \beta, \gamma = h(\beta))$ est associé à une ellipse convenable si et seulement si

$$\forall\ i \in [\![1, k]\!],\ h(\beta) \leqslant g(\beta)\cos(2\theta_i) + \beta \sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$$

Les fonctions h et g sont polynomiales de degré $\leqslant 1$, donc les inégalités précédentes correspodent à des demi-droites fermées (ou $\mathbb{R}$) d'intersection un intervalle fermé K non vide, puisqu'il contient β_2. En résumé, un tel triplet est associé à une ellipse convenable d'aire inférieure ou égal à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si $\beta \in I \cap K$, ce dernier intervalle $I \cap K$ est fermé, borné et non vide.

III.E.4) Notons l'intervalle $A = I \cap K$ de la question précédente. On sait d'après la question précédente qu'une ellipse convenable passant par P_1 et P_2 d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ est associée à un triplet $(g(\beta), \beta, h(\beta))$ avec $\beta \in A$. La fonction $\beta \mapsto \frac{\pi}{\sqrt{T(\beta)}}$ est continue sur le segment A à valeurs réelles positives, elle donc minorée et atteint sa borne inférieure. En d'autres termes, il existe $\beta' \in A$ tel que

$$\frac{\pi}{\sqrt{T(\beta')}} = \min_{\beta \in A} \frac{\pi}{\sqrt{T(\beta)}}$$

L'ellipse associée au triplet $(g(\beta'), \beta', h(\beta'))$ est convenable, passe par les points P_1 et P_2 et d'aire minimale parmi toutes les ellipses convenables passant par P_1 et P_2.

III.F) $(*)$ Supposons l'existence d'une ellipse optimale $\mathcal{E}$. L'ellipse $\mathcal{E}$ est convenable, d'après la question **III-C.2)**, il existe une ellipse convenable passant par l'un des points $P_1, \ldots, P_k$ et d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}$. On peut donc supposer que cette ellipse passe par l'un des points $P_1, \ldots, P_k$ par exemple P_1. D'après la question **III-D.3)**, il existe une ellipse convenable passant par P_1 et par l'un des points $P_2, \ldots, P_k$ et d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}$. Donc s'il existe une ellipse optimale, alors il existe un ellipse optimale passant par deux points au moins des P_i.

$(**)$ Maintenant on va établir l'existence d'une ellipse optimale.
Soit C l'ensemble de tous les couples (i, j), tels que $1 \leqslant i < j \leqslant k$ et il existe une ellipse convenable passant par P_i et P_j. Pour un tel couple, la question **III-E.4)** assure l'existence d'une ellipse $\mathcal{E}_{i,j}$ convenable et d'aire $\mathcal{A}_{i,j}$ minimale parmi toutes les ellipses convenables et passant par P_i et P_j. l'ensemble C est fini, soit alors $\mathcal{A} = \min_{(i,j) \in C} \mathcal{A}_{i,j}$ et $\mathcal{E}$ une ellipse parmi les ellipses $\mathcal{E}_{i,j}$ telles que $\mathcal{A}$ soit l'aire de $\mathcal{E}$.

D'après le point $(*)$, l'ellipse $\mathcal{E}$ est optimale.

Partie IV - Unicité de l'ellipse optimale

IV.A) - Soit $\mathcal{H}_0$ la surface d'équation $Z^2 = X^2 + Y^2$ dans le repère orthonormal $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$.

IV.A.1) La section par le plan $X = 0$ est l'union deux des droites d'équations respectives $X = 0, Z = Y$ et $X = 0, Z = -Y$.
La section par le plan $Y = 0$ est l'union deux des droites d'équations respectives $Y = 0, Z = X$ et $Y = 0, Z = -X$.
La section par le plan $Z = 1$ est le cercle tracé sur ce plan de centre le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et de rayon 1.

IV.A.2) La partie $\mathcal{H}_0$ est un cône de révolution autour de l'axe $X = Y = 0$.

IV.A.2) Si le triplet (α, β, γ) est associé à une ellipse, alors le point de coordonnées ce triplet est strictement au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$. ($\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$.)

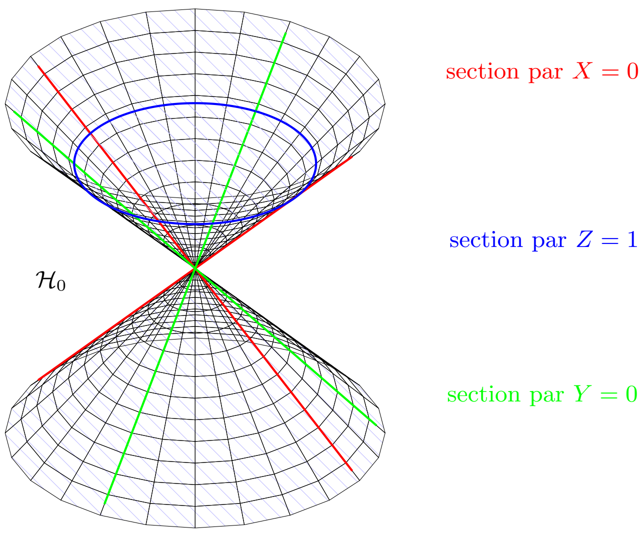

Schéma 1

IV.B) Pour i entre 1 et k, on note $\mathcal{T}_i$ la surface d'équation :

$$Z = X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2} \text{ dans le repère } (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$$

IV.B.1) D'après son équation, $\mathcal{T}_i$ est un plan.

IV.B.2) Les points de l'espace qui vérifient $Z \leqslant X\cos 2\theta_i + Y\sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2}$ sont au-dessous de $\mathcal{T}_i$.

IV.C) -

IV.C.1) La partie $\mathcal{K}$ est l'ensemble des points de coordonnées (α,β,γ) tels que :

$$\gamma > 0, \gamma^2 > \alpha^2+\beta^2 \text{ et } \forall i \in [\![1,k]\!]\,,\ \gamma \leqslant \alpha\cos 2\theta_i + \beta\sin 2\theta_i + \frac{1}{\rho_i^2}$$

Cette partie est formée des points situés strictement au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$ et au-dessous de tous les plans $\mathcal{T}_i$.

IV.C.2) On peut traiter cette question par un simple calcul, sinon, si deux sont situés strictement au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$, leur milieu sera aussi situé strictement au-dessus de $\mathcal{H}_0^+$. De même, s'ils sont situés au-dessous d'un plan $\mathcal{T}_i$. En d'autres termes, le milieu de deux points de $\mathcal{K}$ est un point de $\mathcal{K}$.
Dans la suite de cette partie, l est un réel strictement positif. On note $\mathcal{H}_l$ la surface d'équation

$$Z^2 - X^2 - Y^2 = l$$

et $\mathcal{H}_l^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_l$ qui vérifient $Z > 0$.

IV.D) -

IV.D.1) La section par le plan $X=0$ est l'hyperbole tracée sur ce plan d'équation $X=0, Z^2-Y^2=l$.
La section par le plan $Y=0$ est l'hyperbole tracée sur ce plan d'équation $Y=0, Z^2-X^2=l$.
La section par le plan $Z=\sqrt{l}$ est réduite au point de coordonnées $(0,0,\sqrt{l})$
La section par le plan $Z = 2\sqrt{1}$ est le cercle tracé sur ce plan de centre le point de coordonnées $(0,0,2\sqrt{l})$ et de rayon $\sqrt{3l}$.

IV.D.2) La partie $\mathcal{H}_l$ est une hyperboloïde à deux nappes.

IV.D.3) La partie de $\mathcal{H}_l$ comprise entre les plans $Z=0$ et $Z=2\sqrt{l}$ est celle représentée par le violet sur le schéma 2.

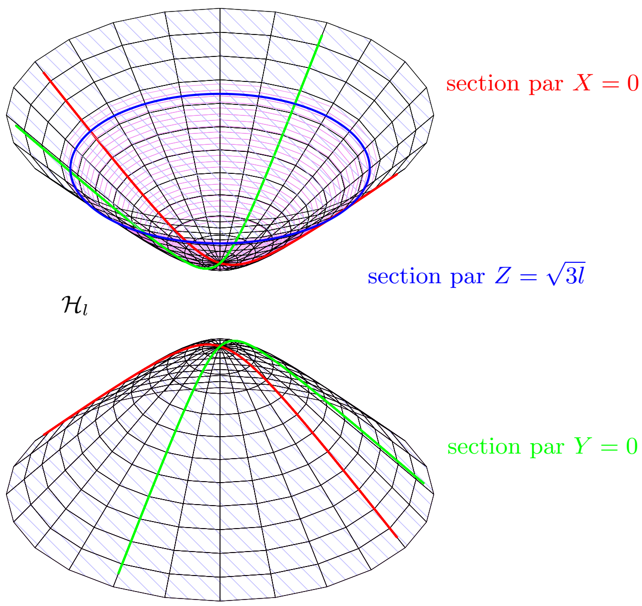

Schéma 2

IV.E) Soient M_1 et M_2 deux points différents de $\mathcal{H}_l^+$, M_3 le milieu du segment M_1M_2 et $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ les coordonnées de M_3.

IV.E.1) Le point M_3 est situé strictement au-dessus de $\mathcal{H}_l^+$.

IV.E.2) Le point de coordonnées $(\alpha_3,\beta_3,\sqrt{l+\alpha_3^2+\gamma_3^2})$ est un élément de $\mathcal{H}_l^+$ et le point M_3 est situé strictement au-dessus de $\mathcal{H}_l^+$, donc $\gamma_3 > \sqrt{l+\alpha_3^2+\gamma_3^2}$, c'est à dire que $\gamma_3^2-\alpha_3^2-\beta_3^2 > l$.

IV.F) On suppose l'existence de deux ellipses optimales distinctes. Soient M_1 et M_2 les points de l'espace dont les coordonnées respectives $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ et $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ sont les triples associés à ces deux ellipses optimales. Les points M_1 et M_2 sont différents car les deux ellipses sont distinctes et les deux ellipses ont la même aire car elles sont optimales, cette aire commune est :

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_1^2-\alpha_1^2-\beta_1^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_2^2-\alpha_2^2-\beta_2^2}}$$

Posons $l = \frac{\pi^2}{\mathcal{A}^2}$ de sorte que $\gamma_1^2-\alpha_1^2-\beta_1^2 = \gamma_2^2-\alpha_2^2-\beta_2^2 = l > 0$. En plus, $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ car les deux triplets sont associés à des ellipses. Alors, M_1 et M_2 sont deux points distincts de $\mathcal{H}_l^+$. Notons M_3 le milieu du segment M_1M_2 et $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ les coordonnées de M_3. D'un autre coté, les points M_1 et M_2 sont des éléments de $\mathcal{K}$ car les ellipses optimales sont convenables, alors, par la question **IV.C.2)**, leur milieu M_3 est aussi dans $\mathcal{K}$ et, en conséquence, l'ellipse associée au triplet $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ est convenable. L'aire de cette ellipse $\mathcal{A}'$ est supériuere ou égal à $\mathcal{A}$. Donc :

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{\sqrt{l}} \leqslant \mathcal{A}' = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}}$$

ce qui conduit à $\gamma_3^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 \leqslant l$, absurde d'après la question **IV.E.2)**.

Partie V - Exemples

V.A) On suppose que $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_k\}$ admet un axe de symétrie Δ passant par O.

V.A.1) Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse optimale. Notons $\mathcal{E}'$ l'image de $\mathcal{E}$ par la symétrie orthogonale d'axe Δ, c'est aussi une ellipse de même aire que celle $\mathcal{E}$. La partie $\mathcal{L}$ étant symétrique par rapport à Δ, donc cette partie est incluse dans $\mathcal{E}'$. Par suite, $\mathcal{E}'$ est convenable, donc optimale. Par unicité, $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ et Δ est un axe de symétrie pour $\mathcal{E}$.

V.A.2) On suppose que $k = 2$ et soient P_1, P_2 les points de coordonnées respectives $(2, 1)$ et $(2, -1)$.

a) Dans ce cas, la droite Δ d'équation $y = 0$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{L} = \{P_1, P_2\}$. Notons $\mathcal{E}$ l'ellipse optimale. Si (α, β, γ) est le triplet associé à cette ellipse, une équation de $\mathcal{E}$ est donnée par : $(\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)y^2 - 2\beta xy = 1$. Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$, par symétrie le point de coordonnées $(x, -y)$ est aussi un point de $\mathcal{E}$. Donc $\beta xy = -\beta xy$ et, par suite, $\beta = 0$. D'un autre coté, on sait que $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, donc $\gamma > \alpha$ et $\gamma > -\alpha$. Posons $a = \frac{1}{\sqrt{\gamma - \alpha}}$ et $a = \frac{1}{\sqrt{\gamma + \alpha}}$ de sorte que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) L'ellipse optimale $\mathcal{E}$ passe au moins par deux points et d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donc contient le point P_1 de coordonnées $(2, 1)$. Par suite, $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. L'aire de $\mathcal{E}$ est donnée par : $\mathcal{A} = \pi ab$. On cherche à rendre cette aire minimale sachant que $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, $a > 0$ et $b > 0$. Ce qui revient à rendre la quantité uv maximale sachant que $u + v = 1$, où on a posé $u = \frac{4}{a^2}$ et $v = \frac{1}{b^2}$ avec $u > 0$ et $v > 0$. On alors $uv = u - u^2$ et $u \in]0, 1[$. Cette quantité uv est maximale si et seulement si $u = \frac{1}{2}$. Donc $a = \frac{2}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{2}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{v}} = \sqrt{2}$. Cette ellipse est d'équation :

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

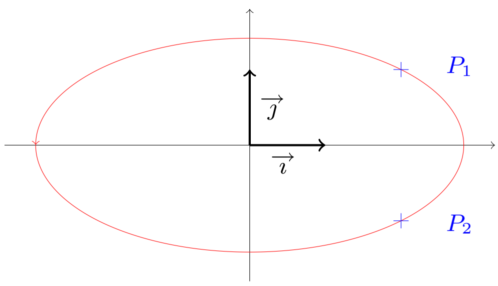

Schéma 3 de l'ellipse optimale

V.B) On suppose que $k = 4$ et P_1, P_2, P_3, P_4 ont respectivement pour coordonnées $(3, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $(0, \frac{1}{2})$ et $(3, \frac{1}{2})$.

V.B.1) Le segment $[P_1, P_2]$ contient le point P_4, donc toute ellipse contenant les points P_1 et P_2, contient forcément le point P_4. C'est pourquoi on peut supprimer un tel point.

V.B.2) Le point P_1 a pour coordonnées cartésiennes $(3, 0)$, un système de coordonnées polaires pour ce point est $(\rho_1, \theta_1) = (3, 0)$.
Le point P_2 a pour coordonnées cartésiennes $(3, \sqrt{3})$, un système de coordonnées polaires pour ce point est $(\rho_2, \theta_2) = (2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$.
Le point P_3 a pour coordonnées cartésiennes $(0, \frac{1}{2})$, un système de coordonnées polaires pour ce point est $(\rho_3, \theta_3) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$.

V.B.3) Les trois inégalités du **III.A.2)** s'écrivent $\gamma \leqslant \alpha\cos(2\theta_i) + \beta\sin(2\theta_i) + \frac{1}{\rho_i^2}$ pour i entre 1 et 3, donc :

$$\begin{cases} \gamma \leqslant \alpha + \frac{1}{9} & (\theta_1 = 0, \rho_1 = 3) \\ \gamma \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12} & (\theta_2 = \frac{\pi}{6}, \rho_2 = 2\sqrt{3}) \\ \gamma \leqslant -\alpha + 4 & (\theta_3 = \frac{\pi}{2}, \rho_3 = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

V.B.4) Supposons l'existence d'une ellipse de centre O passant par P_1 et P_3 et contenant P_2. D'après la question **III.A.3)**, ceci se traduit par :

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \frac{1}{9} \\ \gamma \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12} \\ \gamma = -\alpha + 4 \end{cases} \qquad \text{ce qui donne} \qquad \begin{cases} \gamma = \frac{37}{18}, \alpha = \frac{35}{18} \\ \frac{71-35\sqrt{3}}{18} \leqslant \beta \end{cases}$$

D'un autre coté, puisque le triplet (α, β, γ) est associée à une ellipse, donc, d'après la question **II.C.3)**, on aura $\gamma^2 - \alpha^2 = \frac{4}{9} > \beta^2$ puis $\beta < \frac{2}{3}$. Par suite, $\frac{71-35\sqrt{3}}{18} < \frac{2}{3}$ en encore, après simplification, $3481 < 3675$, ce qui est impossible. Une telle ellipse n'existe pas.

V.B.5) On suppose que les deux premières inégalités du **III.A.2)** sont des égalités. Alors,

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \frac{1}{9} \\ \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12} \end{cases}$$

On est dans les conditions de la question **III.E.2)** puisque $\theta_1 = 0$ (et $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$). Alors,

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 &= -\beta^2 + \frac{2\sin 2\theta_2}{(1-\cos 2\theta_2)\rho_1^2}\beta + \frac{\frac{2}{\rho_2^2} - \frac{2}{\rho_1^2}}{(1-\cos 2\theta_2)\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^4} \\ &= -\beta^2 + \frac{\sqrt{3}}{(1-\frac{1}{2})9}\beta + \frac{\frac{2}{12} - \frac{2}{9}}{(1-\frac{1}{2})9} + \frac{1}{81} \\ &= -\beta^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\beta \end{aligned}$$

V.B.6) La fonction $\beta \mapsto \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est une fonction trinôme en β, sa valeur maximale est atteinte pour $\beta = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

V.B.7) Puisque on admet qu'il n'existe pas d'ellipse de centre O passant par P_2 et P_3 et contenant P_1, l'ellipse optimale passe par P_1 et P_2 et elle contient P_3. Reste à vérifier si la troisième inégalité du **III.A.2)** est réalisée pour $\beta = \frac{\sqrt{3}}{9}$ c'est à dire si $\gamma \leqslant -\alpha + 4$. On sait, d'après **III-E.1)**, que :

$$\alpha = \frac{\sin 2\theta_2}{1-\cos 2\theta_2}\beta + \frac{\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}}{1-\cos 2\theta_2} = \sqrt{3}\beta - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

puis $\gamma = \alpha + \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{7}{18}$ ce qui montre $\gamma \leqslant -\alpha + 4$. L'ellipse associée au triplet (α, β, γ) est optimale. Rappelons qu'équation cartésienne de cette ellipse est donnée par : $(\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy = 1$. C'est à dire que :

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}xy = 1$$

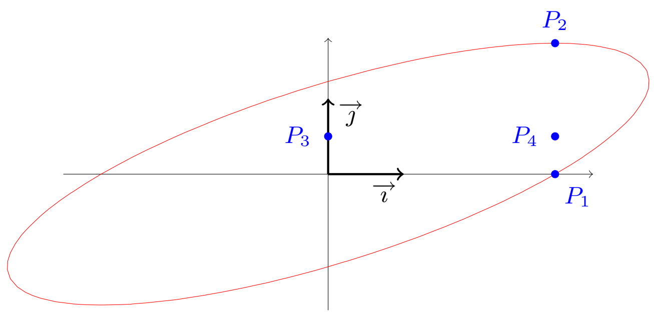

Schéma 4 de l'ellipse optimale