

## E3A – MP – Maths 2

### Partie I

1. Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe sur l'intervalle  $I$  si, pour tout  $(x, y) \in I^2$  et tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on a  $f((1 - \theta)x + \theta y) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f(y)$ .
2. La fonction exponentielle est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée seconde y est positive, elle est donc convexe sur  $\mathbb{R}$ .
3. Appliquons la définition vue en 1. avec  $f = \exp$  et  $(x, y) = (\ln b, \ln a)$ . On obtient

$$\exp(\theta \ln a + (1 - \theta) \ln b) \leq \theta e^{\ln a} + (1 - \theta) e^{\ln b}$$

qui constitue le résultat demandé.

### Partie II

4. (a) On a immédiatement  $\int_u^v t^{x-1} dt = \frac{v^x - u^x}{x}$ .  
 (b) La fonction intégrée étant positive, il revient au même d'étudier la convergence (non absolue) de l'intégrale. Or, la fonction intégrée est définie et continue sur  $]0, 1]$ , et la question précédente montre que  $\int_u^1 t^{x-1} dt$  a pour limite  $1/x$  quand  $u$  tend vers 0 (puisque  $x > 0$ ).  
 L'intégrale est donc absolument convergente et vaut  $1/x$ .  
*Remarque : cela semble être ce qu'attend l'énoncé au vu de la question (a) ; mais Riemann donne évidemment la convergence immédiatement.*
5. La fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est définie, continue et positive sur  $]0, 1]$ , et majorée par la fonction intégrable  $t \mapsto t^{x-1}$  ; elle est donc bien intégrable sur  $]0, 1]$ .
6. (a) Puisque  $x > 0$ , on sait que  $t^{x/2} \ln t$  tend vers 0 en 0 (croissances comparées).  
 (b) La fonction  $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$  est définie et continue sur  $]0, 1]$ . D'autre part, la question (a) montre que  $\ln t = o(t^{-x/2})$  au voisinage de 0, et donc  $(\ln t)t^{x-1}e^{-t} = o(t^{x/2-1}e^{-t})$  en 0.  
 Puisque  $x/2 > 0$ , la fonction positive  $t \mapsto t^{x/2-1}e^{-t}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  d'après 5. ; par suite,  $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$  l'est aussi.
7. (a) Soit  $t \in ]0, 1]$ . La fonction  $x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$  est alors décroissante sur  $[u, v]$  (puisque  $\ln t \leq 0$ ) ; on a donc bien  $|(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}| = (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \leq (\ln t)^2 t^{u-1}$  puisque tous les facteurs sont positifs.  
 (b) On raisonne comme en 6.(b) : on a aussi  $(\ln t)^2 = o(t^{x/2})$  en 0, et donc  $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} = o(t^{x/2-1}e^{-t})$  en 0, ce qui suffit à garantir l'intégrabilité.
8. Soit  $[u, v] \subset \mathbb{R}_+^*$ . On applique, sur  $[u, v]$ , le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, version dérivées successives. Posons, pour  $t \in ]0, 1]$  et  $x \in [u, v]$ ,  $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ . On a alors :
  - pour tout  $x \in [u, v]$ ,  $f(x, \cdot)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, 1]$  (question 5.) ;
  - $f$  admet des dérivées partielles première et seconde par rapport à  $x$  en tout point de  $[u, v] \times ]0, 1]$  ;
  - pour tout  $x \in [u, v]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, 1]$  (question 6.) ;
  - enfin,  $\forall x \in [u, v] \quad \forall t \in ]0, 1] \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = |(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}| \leq (\ln t)^2 t^{u-1} e^{-t} = \varphi(t)$  et  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, 1]$  (question 7.).
 On peut alors conclure que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $[u, v]$ , et ce pour tout  $[u, v] \subset \mathbb{R}_+^*$ , donc que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  ; et que, pour tout  $x > 0$ ,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t} dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} dt$$

### Partie III

9. On a par exemple  $(\ln t)^2 = o(t)$  en  $+\infty$  par croissances comparées, donc  $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t/2} = o(t^x e^{-t/2})$ ; puisque  $t^x e^{-t/2}$  a pour limite 0 en  $+\infty$ , c'est aussi le cas pour  $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t/2}$ .
10. La fonction  $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$  est définie et continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ ; la question 9. montre qu'elle est négligeable devant  $e^{-t/2}$  en  $+\infty$ .  
Puisque  $t \mapsto e^{-t/2}$  est positive et notoirement intégrable sur  $[1, +\infty[$  (car négligeable devant  $1/t^2$  par exemple),  $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$  est elle aussi intégrable sur  $[1, +\infty[$ .  
Enfin, puisque  $\ln t$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , les fonctions proposées en (a) et (b) sont négligeables devant  $|(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}|$  en  $+\infty$ , donc sont elles aussi intégrables sur  $[1, +\infty[$ .
11. La démonstration est quasi identique à celle de la question 8. La seule différence notable est qu'ici, pour tout  $t \in [1, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto t^{x-1}$  est croissante; il faut donc dominer  $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$  par la valeur pour  $x = v$  au lieu de  $x = u$ .

### Partie IV

12. Les facteurs étant de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on peut intégrer par parties, en primitivant le facteur  $e^{-t}$  :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

l'intégration par parties étant justifiée par le fait que la fonction dans le crochet a des limites finies (nulles) en 0 et  $+\infty$ .

13. On a immédiatement  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} = 1$ .
14. On a classiquement  $\Gamma(n) = (n-1)!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui s'établit par une récurrence immédiate à l'aide des deux questions précédentes.
15. En particulier,  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ . Puisque  $\Gamma$  est continue sur  $[1, 2]$  et dérivable sur  $]1, 2[$ , le théorème de Rolle montre que  $\Gamma'$  s'annule au moins une fois sur  $]1, 2[$ .
16. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ; on sait que  $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ . La fonction  $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$  est continue, positive, et non identiquement nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; par suite,  $\Gamma''(x) > 0$ .  
Cela étant vrai pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma$  est donc bien convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
17. Puisque  $\Gamma''$  est strictement positive,  $\Gamma'$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
On a prouvé en 15. que  $\Gamma'$  s'annule en au moins un point  $\alpha \in ]1, 2[$ . La stricte croissance de  $\Gamma'$  montre que c'est son seul point d'annulation, et que  $\Gamma'$  est négative sur  $]0, \alpha[$ , positive sur  $]\alpha, +\infty[$ ; par suite,  $\Gamma$  est décroissante sur  $]0, \alpha[$ , croissante sur  $]\alpha, +\infty[$ , et donc admet un minimum global en  $\alpha$ .
18. Il reste à étudier le comportement de  $\Gamma$  aux bornes du domaine de définition.

Au voisinage de 0,  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x}$  puisque  $\Gamma$  est en particulier continue en 1; par suite,  $\Gamma$  tend vers  $+\infty$  en  $0^+$ .

Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\Gamma$  est croissante, donc admet une limite, finie ou infinie; et cette limite est  $+\infty$  puisque  $\Gamma(n) = (n-1)!$  a pour limite  $+\infty$ .

On en déduit aisément le tracé de la courbe.

### Partie V

19. La fonction  $x \mapsto \ln(e^{cx}) = cx$  est affine, donc convexe (et concave);  $x \mapsto e^{cx}$  est donc bien ln-convexe.
20. Soient  $(x, y) \in I^2$  et  $\theta \in [0, 1]$ . En appliquant la fonction exponentielle (croissante) à l'inégalité qui caractérise la ln-convexité, on obtient

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \exp(\theta \ln(f(x)) + (1-\theta) \ln(f(y))) = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}$$

La question 3 donne alors  $f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$  en prenant  $a = f(x)$  et  $b = f(y)$ .  
On a donc bien prouvé l'inégalité caractérisant la convexité de  $f$ .

La réciproque est fautive : la fonction  $x \mapsto x$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ , mais  $x \mapsto \ln x$  ne l'est pas.

21. (a) Il suffit d'écrire l'inégalité  $g_c(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta g_c(x) + (1 - \theta)g_c(y)$  puis de la diviser par  $\exp(\theta x + (1 - \theta)y)$ .

(b) i. Puisque  $1 - \theta$ ,  $\theta$ ,  $y - x$  et  $f(y)$  sont strictement positifs, le deuxième terme de la somme a pour limite  $+\infty$  quand  $c$  tend vers  $+\infty$ . Le premier terme étant clairement positif,  $H(c)$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

ii. Dans la formule définissant  $H(c_0)$ , on remplace  $e^{c_0(x-y)}$  par  $f(y)/f(x)$ ; on obtient

$$\begin{aligned} H(c_0) &= \theta \frac{f(y)^{1-\theta}}{f(x)^{1-\theta}} f(x) + (1 - \theta) \frac{f(y)^{-\theta}}{f(x)^{-\theta}} f(y) \\ &= \theta f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} + (1 - \theta) f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \end{aligned}$$

iii. Puisque  $H'$  s'annule en changeant de signe en  $c_0$ , et que  $H$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ,  $H$  ne peut être que décroissante sur  $[0, c_0]$ , et croissante sur  $[c_0, +\infty[$ ;  $H$  admet donc un minimum en  $c_0$ .

(c) Puisque l'inégalité du (a) est vraie pour tout  $c > 0$ , elle est en particulier vraie pour  $c = c_0$ ; donc

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}$$

En composant par  $\ln$  (croissante), on obtient l'inégalité qui caractérise la  $\ln$ -convexité de  $f$ .

22. La fonction  $\varphi_{c,\theta}$  est de la forme  $x \mapsto ae^{bx}$ , avec  $b = c + \ln \theta$  et  $a = e^{-\theta}/\theta > 0$ ; par suite, pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi_{c,\theta}''(x) = b^2 \varphi_{c,\theta}(x) \geq 0$ , et donc  $\varphi_{c,\theta}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

23. La fonction  $\Gamma$  prend bien ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  (intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle).

Soit d'autre part  $c > 0$ . Soit  $\Delta : x \mapsto e^{cx}\Gamma(x)$ ; notons que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\Delta(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} e^{cx} dt = \int_0^{+\infty} \varphi_{c,t}(x) dt$$

Soient enfin  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $\theta \in [0, 1]$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Delta(\theta x + (1 - \theta)y) &= \int_0^{+\infty} \varphi_{c,t}(\theta x + (1 - \theta)y) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} [\theta \varphi_{c,t}(x) + (1 - \theta) \varphi_{c,t}(y)] dt \quad (\text{convexité de } \varphi_{c,t}) \\ &= \theta \Delta(x) + (1 - \theta) \Delta(y) \end{aligned}$$

La fonction  $\Delta$  est donc convexe, et ce pour tout  $c > 0$ ; d'après la question 21., la fonction  $\Gamma$  est donc  $\ln$ -convexe.

## Partie VI

24. On démontre comme à la question 14. que  $g(n) = (n - 1)!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

25. (a) La fonction  $G$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On sait qu'alors, pour tout  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$  tel que  $a < b < c$ , on a  $\frac{G(b) - G(a)}{b - a} \leq \frac{G(c) - G(a)}{c - a} \leq \frac{G(c) - G(b)}{c - b}$  (inégalités des pentes).

En particulier,  $0 < n - 1 < n < n + x$ , donc  $\frac{G(n) - G(n - 1)}{n - (n - 1)} = G(n) - G(n - 1) \leq \frac{G(n + x) - G(n - 1)}{(n + x) - (n - 1)} \leq \frac{G(n + x) - G(n)}{(n + x) - n} = \frac{G(n + x) - G(n)}{x}$  qui donne la première des inégalités demandées; la deuxième s'obtient de même en utilisant  $n < n + x < n + 1$ .

(b) On multiplie l'encadrement par  $x > 0$ , et on remplace  $G$  par  $\ln g$ ; on obtient

$$x \ln \frac{g(n)}{g(n - 1)} \leq \ln \frac{g(n + x)}{g(n)} \leq x \ln \frac{g(n + 1)}{g(n)} \quad \text{soit} \quad \ln(n - 1)^x \leq \ln \frac{g(n + x)}{(n - 1)!} \leq \ln n^x$$

en utilisant  $g(p) = (p - 1)!$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ; on en tire immédiatement l'encadrement demandé.

26. En utilisant la relation  $g(x+1) = xg(x)$ , une récurrence immédiate fournit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1)g(x)$ .

Remplaçons  $g(x+n)$  par cette expression dans l'inégalité de la question précédente : on obtient

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} = \frac{n-1}{x+n-1} \frac{(n-1)^x(n-2)!}{x(x+1) \cdots (x+n-2)} \leq g(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$$

ce qui constitue l'encadrement demandé.

27. (a) La fonction  $t \mapsto (1+t)^x$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ , de dérivée seconde  $t \mapsto x(x-1)(1+t)^{x-2}$  négative puisque  $x \in ]0, 1[$  : elle est donc concave.

La courbe est donc sous ses tangentes, en particulier sous sa tangente en 0 ; ce qui donne, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $(1+t)^x \leq 1+xt$  qui est l'inégalité demandée.

- (b) On a clairement  $u_n(x) > 0$  pour tout  $n$ . D'autre part, toujours pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)^x}{n^x} \frac{n}{x+n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{n}{x+n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \frac{n}{x+n} = 1$$

en utilisant la question précédente avec  $\alpha = 1/n > 0$  ; la suite  $(u_n(x))$  est donc décroissante.

- (c) La suite est décroissante et minorée par  $g(x)$ , donc elle converge vers une limite  $\ell(x)$ . On peut alors passer à la limite dans l'encadrement de la question 26. pour obtenir  $\ell(x) \leq g(x) \leq \ell(x)$  et donc  $\ell(x) = g(x)$ .

28. La fonction  $\Gamma$  vérifie elle aussi les trois propriétés imposées à  $g$  au début de cette partie. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes à  $\Gamma$  ; en particulier, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = g(x)$ . Par suite,  $\Gamma = g$  sur  $]0, 1[$ , puisque  $\Gamma(1) = g(1) = 1$ .

Les relations  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et  $g(x+1) = xg(x)$  permettent alors de montrer par récurrence que, pour tout  $x \in ]0, 1[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(x+n) = g(x+n)$  ; autrement dit,  $\Gamma = g$  sur  $]n, n+1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et donc  $\Gamma = g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .