OPTIONS M, P' ET TA - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M, P' et TA comporte 4 pages.

Il est demandé <u>expressément</u> aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans tout le problème, le corps de base utilisé est le corps des complexes $\mathbb{C}$; si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué.

Soit $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées A d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Par définition :

- ${}^tA$ est la matrice transposée de A (si $A = (a_{ij})$ $\quad {}^tA = (a_{ji})$)
- $\bar{A}$ est la matrice complexe conjuguée de A (si $A = (a_{ij})$ $\quad \bar{A} = (\bar{a}_{ij})$)
- A^* est la matrice adjointe de A ($A^* = {}^t\bar{A}$).

PARTIE I

Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite unitaire si et seulement si $A.A^* = A^*.A = I$; I est la matrice unité. Soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices unitaires.

1°) Démontrer que $\mathcal{U}_n$ est un groupe multiplicatif ; est-il commutatif ? $\mathcal{U}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$?

2°) Soit A une matrice de $\mathcal{U}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2.1. Démontrer qu'il existe un réel θ tel que : $ad - bc = e^{i\theta}$.
Ce réel θ est-il unique ?

2.2. Trouver la forme générale des matrices unitaires de $\mathcal{U}_2$ au moyen des trois paramètres a, b et θ ; (exprimer c en fonction de $\bar{b}$ et de θ, d en fonction de $\bar{a}$ et de θ).
Préciser la condition nécessaire et suffisante sur a, b et θ pour que la matrice A soit unitaire.

.../...

2.3. a) Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \rho\, e^{i\alpha_1} \qquad z_2 = \frac{1}{\rho} e^{i\alpha_2} \qquad z_3 = r\, e^{i\phi}$$

α_1, α_2, ϕ, ρ, r sont tous des réels ; de plus :

$$\rho > 0 \qquad r \geqslant 0 \qquad \alpha_1 - \alpha_2 \neq k\pi \quad k \text{ entier relatif.}$$

Soit : $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$.

Démontrer que si la relation

$$z_1 + z_2 = z_3 + \overline{z_3}\, e^{i\gamma}$$

est vérifiée, le réel ρ est égal à 1.

b) Démontrer, en utilisant les résultats précédents que les valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{U}_2$ ont un module égal à 1.

3°) Dans cette question : $n \geqslant 2$.

Soit E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension n, des suites finies $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de nombres complexes u_j ; $j = 1, 2, \ldots, n$.

3.1. Pour deux éléments u et v de E_n soit :

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

vérifier que $(u|v)$ est un produit scalaire hermitien ; c'est-à-dire :

$$(\lambda u + \mu v \mid w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w) \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{C} \quad u,v,w \in E_n$$

$$(u|v) = \overline{(v|u)}$$

Il sera posé dans la suite : $\|u\| = (u|u)^{1/2}$

Dans la suite, E_n est muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ supposée orthonormée ; c'est-à-dire :

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3.2. Soit A un endomorphisme de E_n ; A est représenté dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ par une matrice, notée encore A, définie par :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i \qquad j = 1, 2, \ldots, n \quad .$$

Démontrer que A est unitaire si et seulement si

$$(Au|Av) = (u|v) \qquad \forall\, u,\ v \in E_n \ .$$

3.3. Démontrer que le module d'une valeur propre λ d'une matrice unitaire est égal à 1.

3.4. Soit λ une valeur propre d'une matrice unitaire A ; soit E_λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \{ x \mid x \in E_n : Ax = \lambda x \}$$

Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel ; montrer que, si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A, les sous-espaces E_{λ_1} et E_{λ_2} sont orthogonaux.

.../...

4°) Application. Soit U :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ -i\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que U est une matrice unitaire ; calculer ses valeurs propres ; vérifier que leur module vaut 1.

5°) Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n^+$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n$ définis par :

$$\mathcal{T}_n = \{T \mid T \in \mathcal{M}_n : \text{si } T = (t_{ij}) \quad t_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$$

$$\mathcal{T}_n^+ = \{T \mid T \in \mathcal{T}_n : \text{si } T = (t_{ij}) \quad \forall i \ t_{ii} > 0\}$$

5.1. Démontrer que $\mathcal{T}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$; est-ce un groupe multiplicatif ?

5.2. Démontrer que $\mathcal{T}_n^+$ est un groupe multiplicatif ; est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$?

5.3. Démontrer que toute matrice V appartenant à $\mathcal{T}_n^+$ unitaire est une matrice diagonale (c'est-à-dire : si $V = (v_{ij})$ $i \neq j$ $v_{ij} = 0$).
En déduire que $V = I$.

PARTIE II

1°) Soit E_3, l'espace défini à la question n°3 de la partie I, muni du produit scalaire hermitien et rapporté à une base orthonormée ; soit B la matrice :

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2i & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit v_1, v_2, v_3 les vecteurs lignes de la matrice B :

$$v_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}) \qquad i = 1,2,3 .$$

1.1. Montrer qu'il est possible de choisir des scalaires λ, μ, ν tels que les vecteurs w_1, w_2, w_3 définis par les relations :

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = v_2 + \lambda w_1$$
$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$

sont indépendants et orthogonaux deux à deux.

1.2. Soit w'_1, w'_2, w'_3 les vecteurs définis par la relation :

$$w'_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i \qquad i = 1,2,3$$

Montrer que la matrice U, dont les vecteurs lignes sont les vecteurs w'_i est une matrice unitaire.

1.3. Démontrer qu'il existe un élément unique T de $\mathcal{T}_3^+$ tel que $B = T.U$.

.../...

2°) Soit C une matrice de $\mathcal{M}_n$ inversible ; soit $v_1, v_2, \dots, v_n$ les vecteurs de E_n de coordonnées les coefficients des lignes de C :

$$C = (c_{ij}) \qquad v_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}) \qquad i = 1,2,\dots,n .$$

2.1. Montrer que la suite des vecteurs v_i $i = 1,2,\dots,n$ est une base de E_n .

2.2. Montrer qu'il est possible de déterminer des scalaires α_{ij} tels que les vecteurs w_i $i = 1,2,\dots,n$ définis par les relations :

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \alpha_{12} w_1 \\ &\dots \\ w_p &= v_p - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{ip} w_i \\ &\dots \\ w_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} w_i \end{aligned}$$

sont orthogonaux deux à deux et indépendants.

2.3. Montrer qu'il existe des scalaires β_{ij} tels que :

$$w_p = v_p - \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{ip} v_i \qquad p = 1,2,\dots,n \quad .$$

Donner une relation de récurrence permettant de calculer ces scalaires β_{ij} .

2.4. Soit U la matrice dont les vecteurs lignes sont les vecteurs w_i' $i = 1,2,\dots,n$ définis par la relation :

$$w_i' = \frac{1}{\|w_i\|} w_i \quad .$$

Montrer que U est une matrice unitaire.

2.5. Soit R la matrice appartenant à $\mathcal{T}_n^+$ définie par :

$$R = (r_{ij}) \qquad r_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\beta_{ji}}{\|w_i\|} & \text{si } j < i \\ \dfrac{1}{\|w_i\|} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Montrer : $U = R.C$.

2.6. En déduire qu'il existe une matrice S de $\mathcal{T}_n^+$ telle que : $C = S.U$.
Prouver l'unicité d'une telle matrice S .
