E.N.S.T.I.M. 2004 - Epreuve commune de Mathématiques - Corrigé

Par Catherine Le Merdy
catherine.lemerdy@prepas.org

Analyse

PREMIERE PARTIE

1. $\forall x \in I,\ a(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$

donc $\boxed{A\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-x} + \ln \dfrac{1}{1-x} \text{ est une primitive de } a \text{ sur } I}$

2. Soit $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I telle que $\forall x \in I \quad \varphi(x) \neq 0$
alors φ solution de (E) sur $I \iff \forall x \in I \quad \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$

$\varphi\colon x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{1-x} + \ln \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x} e^{1/1-x}$ convient

Or l'ensemble S des solutions de (E) sur I est une droite vectorielle

donc $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda \dfrac{1}{1-x} e^{1/1-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$

3. Au voisinage de 0 :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} e^{1/1-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) e^{(1+x+x^2+x^3+o(x^3))} \\
&= e(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6} + o(x^3)) \\
&= e(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{17}{3}x^3 + o(x^3))
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) = e(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{17}{3}x^3 + o(x^3))}$$

DEUXIEME PARTIE

4. $\forall x \in I \quad f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{1/1-x}$ donc $P_0 = X$ convient

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{1/1-x}$

alors $\forall x \in I \quad f^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + \dfrac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\right) e^{1/1-x}$

$= P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{1/1-x}$ avec $\underline{P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) + P_n'(X))}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{1/1-x}}$$

5. $P_0 = X$
$P_1 = X^3 + X^2$
$P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$
$P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$

6. f est solution de (E) sur I donc $\forall x \in I \qquad (1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$
Posons $g\colon x \mapsto (1-x)^2$; $h\colon x \mapsto 2-x$ et dérivons n fois :

$\forall x \in I \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f'^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$ donc

$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + n(-2)(1-x) f^{(n)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2} 2 f^{(n-1)}(x) = (2-x) f^{(n)}(x) + n(-1) f^{(n-1)}(x)$ donc

$(1-x)^2 P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - 2n(1-x) P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + n(n-1) P_{n-1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = (2-x) P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - n P_{n-1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

donc

$P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \left(\dfrac{2n}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}\right) P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - \left(\dfrac{n(n-1)}{(1-x)^2} + \dfrac{n}{(1-x)^2}\right) P_{n-1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

donc $P_{n+1}(X) = (2nX + X^2 + X) P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$

$$\boxed{P_{n+1}(X) = ((2n+1)X + X^2) P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)}$$

TROISIEME PARTIE

7. D'après la définition de P_n, on a $f^{(n)}(0) = P_n(1)e$
et en utilisant **6.** on trouve : $P_{n+1}(1) = (2n+1+1)P_n(1) - n^2 P_{n-1}(1)$
donc $\boxed{a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2 a_{n-1}}$

8. a) Comme f est de classe C^∞ sur I, son développement limité en 0 est un développement de Taylor-Young,

donc $\begin{cases} a_0 = f^{(0)}(0) = e \\ a_1 = f^{(1)}(0) = 2e \\ a_2 = f^{(2)}(0) = 7e \\ a_3 = f^{(3)}(0) = 34e \end{cases}$

Conséquence : si on applique **7.** avec $n = 3$, on trouve : $\underline{a_4 = 209e}$

b) Au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(x) = e\left(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{17}{3}x^3 + \frac{209}{24}x^4 + o(x^4)\right)}$$

9. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle sur $[0,1]$:

$$\left| e - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right| \leq \frac{1^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{[0,1]} \left| \exp^{(n+1)} \right| \leq \frac{e}{(p+1)!}$$

or $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(p+1)!} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{p}(u_p) = e}$

10. a) $\forall p \geq 1 \quad S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p$ et $S_p(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)}{i!} = u_{p-1} + u_p$

b) $S_p(0) = u_p$ donc $\overline{\lim\limits_p S_p(0) = e}$

$S_p(1) = u_{p-1} + u_p$ $\underline{\text{donc } \lim\limits_p S_p(0) = 2e}$

11. $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) &= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+1+i)! - 2(n+1)(n+i)! + n^2(n-1+i)!}{(i!)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}(-n - i + i^2) \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{-(n+i)(n-1+i)!}{(i!)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{i^2}{(i!)^2}(n+i-1)! \\ &= -\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} = -S_p(n) + S_{p-1}(n) \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)}$

12. Conséquence : $\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad S_p(n+1) = (2n+1)S_p(n) + S_{p-1}(n) - n^2 S_p(n-1)$

Démonstration par récurrence :

On sait déjà que $(S_p(0))_p$ et $(S_p(1))_p$ convergent.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(S_p(n))_p$ et $(S_p(n-1))_p$ convergent

alors $(S_{p-1}(n))_p$ converge également (suite extraite de $(S_p(n))_p$)

donc $(S_p(n+1))_p$ converge (vers $(2n+2)\lim\limits_p S_p(n) - n^2 \lim\limits_p S_p(n-1)$)

$\boxed{\text{CC} : \forall n \in \mathbb{N} \qquad p \mapsto S_p(n) \text{ converge}}$

13. Si on note $l_n = \lim\limits_p S_p(n)$, on a : $\begin{cases} l_{n+1} = (2n+2)l_n - n^2 l_{n-1} \\ l_0 = e,\ l_1 = 2e \end{cases}$

On montre par récurrence qu'il existe exactement une suite vérifiant ces conditions. Or c'est la cas de (a_n) donc $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = l_n = \lim\limits_p S_p(n)$

Conclusion :

$$\boxed{a_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}}$$

Algèbre et géomètrie

PREMIERE PARTIE

1. $\underline{f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}}$

Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur de Q. Alors $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{X} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (-x-y)\overrightarrow{k}$

alors $f(\overrightarrow{X}) = x\overrightarrow{k} + y\overrightarrow{i} + (-x-y)\overrightarrow{j}$ donc $f(\overrightarrow{X}) \in Q$

donc $\boxed{Q \text{ est stable par } f}$

2. a) $\overrightarrow{v} \in Q$

$\overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$ donc $\overrightarrow{w} \in Q$

Comme Q est de dimension 2, il suffit de montrer que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un système libre :

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w} = \overrightarrow{O}$

alors (sur les coordonnées) : $\begin{cases} \lambda = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\lambda - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu = 0 \end{cases}$ donc $\lambda = \mu = 0$

donc $\boxed{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base de } Q}$

b) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas une base orthonormée directe de E, car $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas normés.

par contre c'est une base orthogonale directe

c) $f(\overrightarrow{v}) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$$\text{donc } f(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\overrightarrow{v} + \sin\theta\overrightarrow{w} \iff \begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \cos\theta \\ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ 1 = -\dfrac{1}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\theta = \frac{4\pi}{3} \text{ convient}}$$

On vérifie que pour cette valeur de θ, on a bien $f(\overrightarrow{w}) = -\sin\theta\overrightarrow{v} + \cos\theta\overrightarrow{w}$ (on a bien $f(\overrightarrow{w}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}$)

d) Si on note $\overrightarrow{V} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ et $\overrightarrow{W} = \dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$

et si on oriente Q à l'aide de la base $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$, $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$ est une base orthonormée directe de Q, les formules du c) s'appliquent à $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ au lieu de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$,

et cela permet d'identifier $f_{|Q}$ comme la rotation d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$

DEUXIEME PARTIE

3. a) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$

donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{P\overline{P} = 3I}$

4. a) $\boxed{JX_1 = X_1 \ ; \ JX_2 = jX_2 \ ; \ JX_3 = j^2X_3}$

b) Conséquence : $JP = (\,X_1 \quad jX_2 \quad j^2X_3\,) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{JP = P\Delta \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}}$

5. On note que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

alors $MJ = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ et $JM = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

donc $MJ = JM \iff \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} \\ a_{13} = a_{21} = a_{32} \\ a_{21} = a_{23} = a_{31} \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}$

donc $\boxed{C(J) = \{\alpha I + \beta J + \gamma J^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}(I, J, J^2)}$

b) (I, J, J^2) est une famille génératrice de $C(J)$

de plus, on montre aisément que cette famille est libre donc

$\boxed{(I, J, J^2) \text{ est une base de } C(J), \text{ donc } C(J) \text{ est de dimension } 3}$

6. a) $M(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$D(a,b,c) = P^{-1}(aI + bJ + cJ^2)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P = aI + b\Delta + c\Delta^2$

donc $\boxed{D(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{\det D(a,b,c) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)}$

$\boxed{\det M(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

c) or $\det D(a,b,c) = \det M(a,b,c)$

donc $\underline{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)}$

d) $M(a,b,c)$ est singulière $\iff \det(M(a,b,c)) = 0 \iff \begin{cases} a+b+c = 0 & \text{ou} \\ a+bj+cj^2 = 0 & \text{ou} \\ a+bj^2+cj = 0 \end{cases}$

La condition $a+b+c=0$ traduit que O est le centre de gravité de (T)

(T) est équilatéral "direct" ssi A est l'image de C par la rotation de centre B, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ ssi $a-b = e^{i\pi/3}(c-b)$

ssi $a-b = (-j^2)(c-b)$ ssi $a - b(1+j^2) + cj^2 = 0$ ssi $a+bj+cj^2 = 0$

De même : (T) est équilatéral "indirect" ssi $a+bj^2+cj = 0$

donc $\boxed{M(a,b,c) \text{ est singulière ssi } (T) \text{ est équilatéral ou } O \text{ est son centre de gravité}}$

TROISIEME PARTIE

7. $\begin{cases} a_{n+1} = \lambda b_n + (1-\lambda)c_n \\ b_{n+1} = \lambda c_n + (1-\lambda)a_n \\ c_{n+1} = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n \end{cases}$

donc $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} Y_n$

donc $Y_{n+1} = M(0, \lambda, 1-\lambda)Y_n$

donc $PZ_{n+1} = M(0, \lambda, 1-\lambda)PZ_n$

donc $Z_{n+1} = P^{-1}M(0, \lambda, 1-\lambda)PZ_n$

donc $\boxed{Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1-\lambda)Z_n}$

8. $D(0, \lambda, 1-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda j + (1-\lambda)j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda j^2 + (1-\lambda)j \end{pmatrix}$

donc $\boxed{D(0, \lambda, 1-\lambda)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda j^2 + (1-\lambda)j)^n \end{pmatrix}}$

9. a) $\left((\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n\right)_n$ converge ssi $\begin{cases} \lambda j + (1-\lambda)j^2 = 1 \\ \text{ou } |\lambda j + (1-\lambda)j^2| < 1 \end{cases}$

or $\lambda j + (1-\lambda)j^2 = 1 \iff \lambda = -j$, ce qui est exclu car $\lambda \in \mathbb{R}$

donc la suite $\left((\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n\right)_n$ converge ssi $|\lambda j + (1-\lambda)j^2| < 1$ ssi $(\lambda j + (1-\lambda)j^2)(\lambda j^2 + (1-\lambda)j) < 1$

ssi $\lambda(\lambda - 1) < 0$ ssi $\lambda \in]0, 1[$

$\boxed{\left((\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n\right)_n \text{ converge ssi } \lambda \in]0,1[}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad Z_n = (D(0, \lambda, 1-\lambda))^n Z_0$

donc, si on note $Z_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

on a : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 \\ \beta_n = (\lambda j + (1-\lambda) j^2)^n \beta_0 \\ \gamma_n = (\lambda j^2 + (1-\lambda) j)^n \gamma_0 \end{cases}$

donc si les conditions du a) sont réalisées, les suites (α_n), (β_n), (γ_n) convergent

Or $Y_n = PZ_n$, donc les suites (a_n), (b_n), (c_n) sont combinaisons linéaires des suites (α_n), (β_n), (γ_n), donc elles convergent également

$\boxed{\text{Si les conditions du a) sont réalisées, les suites } (a_n),\ (b_n),\ (c_n) \text{ convergent}}$

10. a) d'après **7.**, on a $\underline{a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n}$

b) $Y_n = PZ_n$ donc $\begin{cases} a_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \\ b_n = \alpha_n + j\beta_n + j^2\gamma_n \\ c_n = \alpha_n + j^2\beta_n + j\gamma_n \end{cases}$

or (α_n) est une suite constante, alors que (β_n) et (γ_n) convergent vers 0

donc $\boxed{(a_n),\ (b_n),\ (c_n) \text{ convergent bien vers la même limite : } \alpha_0}$

c) (a_n), (b_n), (c_n) convergent vers la même limite et la suite $(a_n + b_n + c_n)$ est une suite constante égale à $a + b + c$

donc $\boxed{\lim(a_n) = \lim(b_n) = \lim(c_n) = \dfrac{a+b+c}{3}}$