

## Généralités

- 1)  $g$  est bornée car continue 1-périodique et  $b^{-a} \in ]0, 1[$  donc la série définissant  $W$  est normalement convergente sur  $\mathbf{R}$ . On a  $|W(x)| \leq \|g\|_\infty \sum_{n \geq 0} b^{-an} = \frac{\|g\|_\infty}{1 - b^{-a}}$ , donc  $W$  est bornée sur  $\mathbf{R}$ .
- 2) Chaque terme de la série l'est.
- 3a) Calcul immédiat.
- 3b) L'équation étant linéaire en  $f$ , il suffit de prouver que si  $f$  est continue, bornée, solution de  $f = Tf$  alors  $f = 0$ . De fait, on a  $\|f\|_\infty = \|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty / b^a$ , ce qui implique  $\|f\|_\infty = 0$  d'où  $f = 0$ .
- 4a) Regrouper  $W(x) - W(y)$  dans une seule série, puis découper en somme pour  $0 \leq n < N$  et somme pour  $n \geq N$ . La majoration demandée vient de suite.
- 4b) Soient  $x, y \in \mathbf{R}$ .

Si  $|x - y| < 1$ , on note  $N$  l'unique entier naturel tel que  $b^{-N} \leq |x - y| < b^{1-N}$ . Alors, d'après la question précédente,  $|W(x) - W(y)| \leq \frac{\|g\|_{\text{Lip}}}{b^{1-a} - 1} (b/|x - y|)^{1-a} |x - y| + \frac{2\|g\|_\infty}{1 - b^{-a}} |x - y|^a = C|x - y|^a$ .

Si  $|x - y| \geq 1$  on a  $|W(x) - W(y)| \leq 2\|W\|_\infty \leq 2\|W\|_\infty |x - y|^a$ .

D'où  $|W(x) - W(y)| \leq \max(C, 2\|W\|_\infty) |x - y|^a$  dans tous les cas.

- 5a) Formule de Taylor avec reste intégral :

$$g(x + h) = g(x) + hg'(x) + \int_{t=0}^h (h - t)g''(x + t) dt = g(x) + hg'(x) + h^2 \int_{u=0}^1 (1 - u)g''(x + hu) du.$$

En remplaçant  $h$  par  $-h$  et en additionnant il vient :

$$|g(x + h) + g(x - h) - 2g(x)| = h^2 \left| \int_{u=0}^1 (1 - u)(g''(x + hu) + g''(x - hu)) du \right| \leq h^2 \|g''\|_\infty.$$

Rmq : la condition  $|h| \leq 1$  est inutile.

- 5b) D'après l'inégalité précédente, pour  $x, h \in \mathbf{R}$  et pour  $N \in \mathbf{N}$  on a :

$$|W(x + h) + W(x - h) - 2W(x)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} Cb^n |h|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} 4\|g\|_\infty b^{-n} \leq C|h|^2 \frac{b^N}{b-1} + 4\|g\|_\infty \frac{b^{-N}}{1-b^{-1}}.$$

Si  $|h| \leq 1$ , on choisit  $N$  tel que  $b^{-N} \leq h < b^{1-N}$  et on obtient l'inégalité demandée.

## Inversion de Fourier

- 1a) La fonction  $x \mapsto x^2 f(x)$  est continue et a des limites finies en  $\pm\infty$  donc elle est bornée par un réel  $C$ . On en déduit  $|f(nh)| \leq \frac{C}{n^2 h^2}$  pour  $h > 0$  et  $n \geq 1$ , ce qui prouve la convergence absolue.
- 1b) L'intégrale  $\int_{x=0}^{+\infty} f(x) dx$  est convergente puisqu'elle n'est généralisée qu'en  $+\infty$  et  $f(x) \leq C/x^2$  comme on l'a vu précédemment. De plus, on a :

$$\int_{t=0}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x=nh}^{(n+1)h} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} h \int_{t=0}^1 f((n+t)h) dt.$$

On doit donc prouver que  $\sum_{n=0}^{\infty} h \int_{t=0}^1 (f((n+t)h) - f(nh)) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$ . Soit  $h > 0$  et  $N \in \mathbf{N}^*$  à fixer en fonction de  $h$ . Pour  $n \geq N$  on a :

$$\left| h \int_{t=0}^1 (f((n+t)h) - f(nh)) dt \right| \leq h \int_{t=0}^1 \left( \frac{C}{(n+t)^2 h^2} + \frac{C}{n^2 h^2} \right) dt = \frac{1}{h} \left( \frac{C}{n(n+1)} + \frac{C}{n^2} \right) \leq \frac{1}{h} \times \frac{3C}{n(n+1)}$$

(car  $n^2 \geq \frac{1}{2}n(n+1)$ ). On en déduit :

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} h \int_{t=0}^1 (f((n+t)h) - f(nh)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{3C}{n(n+1)} = \frac{3C}{Nh}.$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$  :  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbf{R}$  (car continue ayant des limites finies en  $\pm\infty$ ) donc il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x, y \in \mathbf{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . Pour  $0 < h \leq \delta$ , et  $N \in \mathbf{N}^*$  on a donc :

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} h \int_{t=0}^1 (f((n+t)h) - f(nh)) dt \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} h \int_{t=0}^1 \varepsilon dt + \frac{3C}{Nh} = (N+1)h\varepsilon + \frac{3C}{Nh}.$$

Choisissons  $N \in \mathbf{N}^*$  de sorte que  $(N+1)h \leq 2/\sqrt{\varepsilon}$  et  $Nh \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$  : c'est possible si  $h \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$ , ce qu'on suppose désormais. On obtient finalement :

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} h \int_{t=0}^1 (f((n+t)h) - f(nh)) dt \right| \leq (2+3C)\sqrt{\varepsilon}$$

pour tout  $h$  suffisamment proche de zéro, ce qui suffit à conclure.

1c) On pose  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} hf(nh) = \sum_{n=0}^{\infty} hf(nh) + \sum_{n=0}^{\infty} hf(-nh) - hf(0)$ , sous réserve de convergence des deux séries. La première

converge, et sa somme tend, lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ , vers  $\int_{x=0}^{+\infty} f(x) dx$ , on l'a vu. La deuxième converge et sa somme tend, lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ , vers  $\int_{x=0}^{+\infty} f(-x) dx = \int_{x=-\infty}^0 f(x) dx$  par remplacement de  $f(x)$  en  $f(-x)$ , et le dernier terme tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ .

2) Soit  $[a, b]$  un intervalle compact et  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $a + NT > 0$  et  $b - NT < 0$ . Pour  $x \in [a, b]$  et  $k \geq N$  on a  $|f(x + kT)| \leq \frac{C}{(x + kT)^2} \leq \frac{C}{(a + kT)^2}$  et de même  $|f(x - kT)| \leq \frac{C}{(b - kT)^2}$ . Ceci prouve que les séries  $\sum_{k=N}^{\infty} f(x + kT)$  et  $\sum_{k=-N}^{\infty} f(x - kT)$  sont normalement convergentes sur  $[a, b]$  ; il en est donc de même de la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + kT)$ . La continuité et la  $T$ -périodicité de  $f_T$  sont alors évidentes.

3)  $f_T(x) \exp(-2i\pi nx/T) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(x + kT) \exp(-2i\pi nx/T)$ , série normalement convergente sur  $[0, T]$  donc on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} c_n(f_T) &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{x=0}^T f(x + kT) \exp(-2i\pi nx/T) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{x=0}^T f(x + kT) \exp(-2i\pi n(x + kT)/T) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{x=kT}^{(k+1)T} f(x) \exp(-2i\pi nx/T) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi nx/T) dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \mathcal{F}f(2\pi n/T). \end{aligned}$$

Le regroupement  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{x=kT}^{(k+1)T} = \int_{x=-\infty}^{+\infty}$  est justifié par la convergence de cette dernière intégrale.

4a) Cela résulte de l'inégalité  $|c_n(f_T)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \times \frac{C'T^2}{4\pi^2 n^2}$  avec  $C' = \sup\{y^2 |\mathcal{F}f(y)|, y \in \mathbf{R}\}$ .

4b) C'est, en substance, le théorème de Parseval.

4c) Soit  $S_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_T) \exp(2i\pi nx/T)$  : la série convergeant uniformément sur  $\mathbf{R}$ ,  $S_T$  est une fonction continue  $T$ -périodique et pour  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $c_n(S_T) = c_n(f_T)$  par intégration terme à terme. Ainsi  $f_T$  et  $S_T$  sont deux fonctions continues  $T$ -périodiques ayant mêmes coefficients de Fourier ; elles sont égales.

5) Soit  $x \in \mathbf{R}$  fixé. On suppose  $T$  suffisamment grand pour que  $x + T > 0$  et  $x - T < 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} |f_T(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f(x + kT) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x - kT) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{(x + kT)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{(x - kT)^2} \\ &\leq \frac{C}{(x + T)^2} + \int_{u=1}^{+\infty} \frac{C du}{(x + uT)^2} + \frac{C}{(x - T)^2} + \int_{u=1}^{+\infty} \frac{C du}{(x - uT)^2} \\ &= \frac{C}{(x + T)^2} + \frac{C}{T(x + T)} + \frac{C}{(x - T)^2} + \frac{C}{T(T - x)} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

6) Soit  $x \in \mathbf{R}$ . En posant  $h = \frac{2\pi}{T}$  et  $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f(u) \exp(iux)$ , on a  $f_T(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} hg(nh)$ , et  $g$  est continue, négligeable devant  $1/u^2$  à l'infini, donc on peut appliquer 1c :  $f_T(x) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{u=-\infty}^{+\infty} g(u) du = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x)$ .

### Construction d'une ondelette

1a)  $(x, y) \mapsto f(x) \exp(-iyx)$  satisfait aux hypothèses du théorème de Leibniz : la fonction et sa dérivée partielle par rapport à  $y$  sont continues par rapport à chaque variable et dominées par une fonction intégrable sur  $\mathbf{R}$  par rapport à  $x$ . On a donc  $(\mathcal{F}f)'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) \exp(-iyx) dx = \mathcal{F}g(y)$  avec  $g(x) = -ixf(x)$ . Ceci démontre la formule demandée pour  $n = 1$ . Le cas général se traite par récurrence sur  $n$ .

1b) On a en intégrant par parties :  $\mathcal{F}(f')(y) = iy\mathcal{F}f(y)$  et plus généralement :  $\mathcal{F}(f^{(n)})(y) = (iy)^n \mathcal{F}f(y)$  pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $y \in \mathbf{R}$ . Comme  $f^{(n)}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ , il en résulte que  $y \mapsto (iy)^n \mathcal{F}f(y)$  est bornée sur  $\mathbf{R}$ , ce qui implique  $y^{n-1} \mathcal{F}f(y) \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0$ .

2abc) Questions élémentaires.

2d) Prendre  $f(x) = \psi_0(x - a)\psi_0(b - x)$ .

3) On suppose  $b > 1$  pour que l'intervalle  $]1/b, b[$  soit bien défini. On pose  $f(x) = \psi_0(-x - 1/b)\psi_0(b + x)$  et  $\psi_b = \mathcal{F}f$ . Donc  $\psi_b \in \mathcal{S}$ , ce qui implique que  $\psi_b$  et  $y \mapsto y\psi_b(y)$  sont intégrables sur  $\mathbf{R}$ . De plus,  $x^2 f(x)$  et  $y^2 \psi_b(y)$  ont des limites nulles à l'infini donc  $\mathcal{F}\psi_b(x) = f(-x)$ , d'après la formule d'inversion de Fourier. Cette dernière quantité est bien strictement positive entre  $1/b$  et  $b$ , et nulle ailleurs. Enfin,  $\int_{y=-\infty}^{+\infty} \psi_b(y) dy = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f(0) = 0$

et  $\int_{y=-\infty}^{+\infty} y\psi_b(y) dy = i\sqrt{2\pi} (\mathcal{F}f)'(0) = 0$ .

## Non dérivabilité de $W$ dans le cas $g(x) = \cos(2\pi x)$

1) Prendre  $\varepsilon_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$  pour  $h \neq 0$  et  $\varepsilon_x(0) = 0$ . Par construction  $\varepsilon_x$  est continue en tout point  $h \neq 0$  ; elle est aussi continue en  $h = 0$  par définition de  $f'(x)$ . Enfin  $\varepsilon_x$  est bornée sur  $\mathbf{R}$  car continue, de limite  $-f'(x)$  pour  $|h| \rightarrow \infty$  puisque  $f$  est bornée.

2a)  $f$  est bornée et  $\psi_b$  est intégrable donc l'intégrale définissant  $c(\alpha, x)$  est convergente.

2b)

$$\begin{aligned} c(\alpha, x) &= \frac{1}{\alpha} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x + \alpha t) \psi_b(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_b(t) dt + \int_{t=-\infty}^{+\infty} f'(x) t \psi_b(t) dt + \int_{t=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x(\alpha t) t \psi_b(t) dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x(\alpha t) t \psi_b(t) dt. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à cette dernière intégrale car  $\varepsilon_x$  est bornée,  $t \mapsto t\psi_b(t)$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$  et  $\varepsilon_x(\alpha t) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$  à  $t$  fixé.

3a) Avec  $f = W$  on a :

$$\begin{aligned} c(\alpha, 0) &= \frac{1}{\alpha} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-an} \cos(2\pi b^n \alpha t) \psi_b(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-an} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi b^n \alpha t) \psi_b(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-an} \sqrt{2\pi} \frac{\mathcal{F}\psi_b(2\pi b^n \alpha) + \mathcal{F}\psi_b(-2\pi b^n \alpha)}{2}. \end{aligned}$$

L'intégration terme à terme est justifiée par le fait que  $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |b^{-an} \cos(2\pi b^n \alpha t) \psi_b(t)| dt \leq b^{-an} \int_{t=-\infty}^{+\infty} |\psi_b(t)| dt$ , terme général d'une série convergente.

Prenons  $\alpha = \frac{1}{2\pi b^k}$  avec  $k \in \mathbf{N}$ . Alors  $c(\alpha, 0) = \frac{b^{-ak} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\psi_b(1)}{2\alpha} = \frac{1}{2} (2\pi)^{a+1/2} \mathcal{F}\psi_b(1) \alpha^{a-1}$  car seul le terme pour  $n = k$  est non nul. Ainsi,  $c(\alpha, 0)$  ne tend pas vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. On contredit **2b**, donc  $W$  n'est pas dérivable en 0.

3b) Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Par des calculs similaires on aboutit à

$$c(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-an} \sqrt{2\pi} \frac{\exp(2i\pi b^n x) \mathcal{F}\psi_b(-2\pi b^n \alpha) + \exp(-2i\pi b^n x) \mathcal{F}\psi_b(2\pi b^n \alpha)}{2}.$$

En particulier pour  $\alpha = 1/(2\pi b^k)$ ,  $|c(\alpha, x)| = |c(\alpha, 0)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$ , donc  $W$  n'est pas dérivable en  $x$ .

## Une alternative pour $W$

1) Immédiat.

2a) Par hypothèse il existe  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $h > 0$ ,  $u > 0$  tel que  $|W(x_0 + h) - W(x_0)|/h \geq \|g\|_{\text{Lip}}(1+u)/(b^{1-a} - 1)$ . Si  $h < 1$ , c'est bon. Si  $h = 1$  alors par continuité on a  $|W(x_0 + k) - W(x_0)|/k \geq \|g\|_{\text{Lip}}(1+u/2)/(b^{1-a} - 1)$  pour tout  $k$  suffisamment proche de 1, donc c'est encore bon. Enfin, si  $h > 1$ , on peut remplacer  $h$  par  $h - 1$ , le premier membre augmentant alors. De proche en proche, c'est bon pour tout  $h > 0$ .

2b) On peut remplacer  $x_0$  par  $x_0 + n$  pour tout entier relatif  $n$ . Ainsi,  $\ell = 1 + h$  convient car si  $I$  est un intervalle de longueur strictement supérieure à  $1 + h$  alors  $I \cap (I - h)$  contient un segment de longueur 1, donc contient un  $x_I = x_0 + n$  et par construction,  $x_I + h \in I$ .

2c) Légère erreur d'énoncé : on a  $\ell(I) \geq \ell$  alors qu'il faudrait l'inégalité stricte. On choisit donc plutôt  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $\ell b^{-N} < \ell(J) \leq \ell b^{1-N}$  (c'est possible puisque  $\ell(J) < 1 < \ell b$ ), ce qui assure l'existence de  $x_I$  défini en 2b. On a alors  $\frac{|W(b^{-p}(x_I + h)) - W(b^{-p}x_I)|}{b^{-p}h} \geq \frac{\|g\|_{\text{Lip}}}{b^{1-a} - 1} (1 + b^{p(1-a)}u) \geq \frac{u\|g\|_{\text{Lip}} b^{p(1-a)}}{b^{1-a} - 1}$  par récurrence sur  $p$ , et pour  $p = N$  :  $b^{-N}x_I, b^{-N}(x_I + h) \in J$ .

2d) Car  $|W(x_J) - W(y_J)| \geq \frac{hu\|g\|_{\text{Lip}}}{b^{1-a} - 1} b^{-Na} \geq \frac{hu\|g\|_{\text{Lip}}}{(b^{1-a} - 1)(\ell b)^a} \times \ell(J)^a$ .

3) Remarque préliminaire : si  $W$  est lipschitzienne, alors on a nécessairement  $\|W\|_{\text{Lip}} \leq \frac{\|g\|_{\text{Lip}}}{b^{1-a} - 1}$ . En effet, soit  $\varepsilon > 0$  et  $x, y \in \mathbf{R}$  distincts tels que  $|W(x) - W(y)| \geq (\|W\|_{\text{Lip}} - \varepsilon)|x - y|$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |g(x/b) - g(y/b)| &= |b^{-a}(W(x) - W(y)) - (W(x/b) - W(y/b))| \\ &\geq b^{-a}|W(x) - W(y)| - |W(x/b) - W(y/b)| \\ &\geq (\|W\|_{\text{Lip}}(b^{1-a} - 1) - b^{1-a}\varepsilon)|x/b - y/b|, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\|g\|_{\text{Lip}} \geq \|W\|_{\text{Lip}}(b^{1-a} - 1) - b^{1-a}\varepsilon$ , et ce pour tout  $\varepsilon > 0$ . Ainsi, la propriété (i) est équivalente au caractère lipschitzien de  $W$ . Il s'agit donc de prouver que  $W$  est lipschitzienne si et seulement si elle est dérivable en au moins un point.

Si  $W$  n'est pas lipschitzienne alors  $x, u, h$  définis en 1 existent et donc le résultat de 2d est valide. Considérons alors un éventuel  $x \in \mathbf{R}$  tel que  $W$  soit dérivable en  $x$  : on a  $W(y) = W(x) + (y - x)W'(x) + (y - x)\varepsilon_x(y - x)$  (cf. IV-1). Soit  $J$  un intervalle ouvert quelconque contenant  $x$  : pour tout  $y \in J$  on a  $|W(y) - W(x)| \leq \ell(J)(|W'(x)| + \|\varepsilon_x\|_\infty)$  et donc  $\sup(W(J)) - \inf(W(J)) = O_{\ell(J) \rightarrow 0}(\ell(J))$  contrairement à 2d. Ceci prouve que  $W$  est nulle part dérivable.

Si  $W$  est lipschitzienne alors elle est dérivable presque partout au sens de la mesure de Lebesgue. Ceci est une conséquence du théorème de Lebesgue suivant : *toute fonction numérique à variation bornée sur un intervalle est presque partout dérivable sur cet intervalle*. Il s'agit d'un théorème très au delà du programme des classes MP\*, et on ne peut pas attendre des candidats qu'ils le connaissent. Il existe peut-être une démonstration élémentaire de la dérivabilité en *au moins un point*, mais je ne l'ai pas trouvée...

4) Soit  $W$  une fonction 1-périodique lipschitzienne non constante quelconque et  $g = W - TW$ . Donc  $g$  est 1-périodique, lipschitzienne et puisque  $W = g + TW$ , d'après I-3b,  $W$  est la fonction associée à  $g$  par (1). De plus,  $g$  n'est pas constante sinon  $W$  le serait.