

I Première partie

I.A -

I.A.1) Classiquement, on fait une intégration par parties à partir de I_{n+2} .

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \cos x \, dx = \left[\cos^{n+1} x \sin x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^n x \sin^2 x \, dx.$$

Le crochet est nul et on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

$$I_{n+2} = (n+1) (I_n - I_{n+2}), \text{ qui donne finalement : } I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

I.A.2) De façon tout aussi classique :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2 n(n-1)} I_{2(n-2)} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3)(1)}{2^n n!} I_0.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le dénominateur et on remplace I_0 par $\frac{\pi}{2}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On fait le même type de calcul pour I_{2n+1} .

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2(n-1)+1} = \frac{2^2 n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} I_{2(n-2)+1} = \dots = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\dots(3)} I_1.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le numérateur et on remplace I_1 par 1,

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

I.B -

I.B.1) La première relation évidente est : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+2}$ étant donnée la relation de récurrence.

Par ailleurs, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos^{n+2} x \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x$, qui donne : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.

On en conclut : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$ en revenant, au besoin, à la définition des équivalents.

I.B.2) On a : $J_n = (n+1) I_n I_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} = J_{n+1}$, en utilisant simplement la relation de récurrence.

La suite (J_n) est donc constante, et : $J_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{\pi}{2}$.

Mais, $J_n \underset{+\infty}{\sim} n I_n^2$, d'où : $\lim_{+\infty} n I_n^2 = \frac{\pi}{2}$, et comme $I_n \geq 0$: $\lim_{+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Et, on en conclut : $\sqrt{n} I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.B.3) On a : $\text{Ent}(t) \leq t < \text{Ent}(t) + 1$,

d'où $\cos^{\text{Ent}(t)+1} x \leq \cos^t x \leq \cos^{\text{Ent}(t)} x$, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où encore

$I_{\text{Ent}(t)+1} x \leq \int_0^{\pi/2} \cos^t x \, dx \leq I_{\text{Ent}(t)}$, et comme les termes extrêmes sont équivalents :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^t x \, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \text{Ent}(t)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \text{ car } \text{Ent}(t) \underset{+\infty}{\sim} t.$$

I.B.4) Remarquons d'abord que la série est une série à termes positifs, on pourra travailler par équivalence.

On fait le changement de variable $x = u + n\pi$, et on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x \, dx = \int_0^\pi |\sin u|^{u+n\pi} \, du = \int_0^\pi (\sin u)^{u+n\pi} \, du = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{u+n\pi} \, du \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{x+n\pi} \, dx, \text{ par un nouveau changement de variable } x = \frac{\pi}{2} - u. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos^{n\pi+\frac{\pi}{2}} x \leq \cos^{x+n\pi} x \leq \cos^{n\pi} x$.

$$\text{Mais } \int_0^{\pi/2} \cos^{n\pi + \frac{\pi}{2}} x \, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n\pi + \frac{\pi}{2})}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{\pi/2} \cos^{n\pi} x \, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2n}}.$$

$$\text{Ce qui donne : } u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{1}{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

$\sum u_n$ diverge donc.

Par la relation de Chasles et le fait que la suite des sommes partielles d'une série positive divergente tend vers l'infini, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} |\sin x|^x \, dx = +\infty$, ce qui assure la divergence de l'intégrale généralisée par application de la définition même de la convergence d'une telle intégrale.

I.C -

$$\begin{aligned} \text{I.C.1)} \quad v_n &= u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - n - 1 - \ln((n+1)!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n + \ln(n!) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

On fait un développement limité à l'ordre 3 du logarithme, qui donne :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

I.C.2) On a donc $\sum v_n$ qui converge par équivalence et qui est de même nature que la suite (u_n) , qui est donc aussi convergente.

On rappelle qu'en effet, une suite et sa série des différences sont de même nature.

$$\text{I.D} \quad \text{On a montré que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n - \ln(n!) = S.$$

$$\text{On en prend l'exponentielle (qui est bien une fonction continue): } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} = e^S.$$

$$\text{Ce qui donne : } n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{e^S}. \text{ Ce qui est bien le résultat annoncé en posant : } C = \frac{1}{e^S}.$$

I.E On va ici utiliser le résultat suggéré, mais aussi l'écriture de I_{2n} en factorielles et le résultat que l'on vient d'obtenir.

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{2n} C^2 n^{2n+1} e^{-2n}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{On avait aussi : } I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

$$\text{On obtient donc : } \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{C} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\pi}{2} \text{ et enfin : } C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.$$

Mais comme n a disparu, ce sont deux constantes, et on a l'égalité : $C = \sqrt{2\pi}$ et :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

II Deuxième partie

II.A On sait que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ sur $[-1,1[$ et n'est pas définie ailleurs. C'est du cours !

II.B Etude de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

II.B.1) Le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$ s'obtient classiquement par application du théorème de d'Alembert.

Pour $x \neq 0$,
$$\left| \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} x \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \frac{n}{n+1} x \right| \underset{+\infty}{\sim} |x|.$$

Ce qui prouve que le rayon de convergence est 1.

II.B.2) Pour $x = -1$, la série est : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

Cette série numérique est clairement alternée, répondant au critère spécial : le terme général $(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et est décroissant en valeur absolue. Elle converge donc.

Calculons la somme partielle jusqu'au rang $2N$.

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(n).$$

Dans chaque somme, on sépare les termes de rang pair, en posant $n = 2p$, et de rang impair en posant $n = 2p - 1$ la première fois et $n = 2p + 1$ la seconde.

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{p=1}^N \ln(2p+1) - \sum_{p=1}^N \ln(2p) - \sum_{p=1}^N \ln(2p) + \sum_{p=0}^{N-1} \ln(2p+1) \\ &= 2 \sum_{p=1}^N \ln(2p+1) + \ln(1) - \ln(2N-1) - 2 \sum_{p=1}^N \ln(2p) \\ &= 2 \ln\left(\frac{(3)(5) \dots (2N-1)(2N+1)}{2^N N!}\right) - \ln(2N-1) \\ &= -2 \ln(I_{2N+1}) - \ln(2N-1) = -\ln\left((I_{2N+1})^2 (2N-1)\right). \end{aligned}$$

On peut prendre le logarithme d'équivalents, ce qui donne : $S_{2N} \underset{+\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$, qui est donc la limite de S_{2N} à l'infini, et donc celle de S_N puisque la série converge.

On en conclut que : $g(-1) = -\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$

II.C Notons d'abord que, pour $x \geq 0$, $g(x)$ est clairement croissante. Ce qui fait que

- $g(x)$ a une limite finie en 1^- , ou,
- $g(x)$ tend vers $+\infty$ en 1^- .

Par ailleurs, $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge, en utilisant par exemple le critère d'équivalence.

Comme la somme d'une série entière est continue sur son ensemble de convergence, $g(x)$ ne peut avoir de limite finie en 1^- , et donc : $g(x)$ tend vers $+\infty$ en 1^- .

Cette démonstration manque de rigueur, sans doute faut-il faire une démonstration en ε ou utiliser la question suivante...

II.D Comparaison de f et g en 1^- .

II.D.1) Pour $x \in]-1, 1[$, on a : $g(x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^n.$

Mais, $\ln\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$, ce qui fait que la série entière converge en 1, et, par continuité sur l'intervalle de convergence, a une limite à gauche en 1.

Finalement, $g(x) + \ln(1-x)$ a une limite finie à gauche en 1.

Ceci prouve rigoureusement le résultat précédent !

II.D.2) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

Étudions φ définie sur $[0, 1[$ par : $\varphi(u) = u + \ln(1-u).$

$\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{1-u} = \frac{-u}{1-u} \leq 0 \Rightarrow \varphi$ décroît, mais : $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(u) \leq 0$ sur $[0,1[$.
D'où (w_n) décroît.

II.D.3) On va d'abord montrer que $w_n \geq 0$

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Mais, on pose : $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$, par le même type de calcul. Donc $(v_n) \nearrow$. De plus $v_2 > 0$.

Ce qui donne : $w_n \geq v_n \geq v_2 > 0$,

(w_n) converge bien vers une limite strictement positive.

II.E $\sum_{k=1}^n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = - \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{+\infty} -\gamma + 0.$

On a bien : $l = -\gamma$.

II.F Une expression intégrale de γ .

II.F.1) $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \right) dt$ a une singularité en 0 et en 1.

En 1, c'est un faux problème puisque la fonction a une limite finie en ce point.

En 0, $\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} = \frac{\ln(1-t) + t}{t \ln(1-t)} = \frac{-\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{-t^2 + o(t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$

On en encore une limite finie, l'intégrale converge aussi en 0, et donc converge.

II.F.2) On pose : $x = -\ln(1-t)$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les deux intégrales sont de même nature, ici convergentes, et donc égales.

on obtient : $t = 1 - e^{-x}$, et aussi : $dt = e^{-x} dx$.

D'où : $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx.$

Par ailleurs, $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$, et $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, car c'est aussi la limite de $\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}$ en 0.

ϕ est donc continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité aux deux bornes, donc bornée sur cet intervalle par un réel positif K .

II.F.3) Notons d'abord que : $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k}.$

$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$ par somme des termes d'une suite géométrique. On en déduit :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) + \frac{e^{-(n+1)x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx. \end{aligned}$$

En effet, ces deux intégrales convergent bien, on montre facilement que la première est absolument convergente en utilisant le fait que Φ est bornée ; la seconde converge alors puisque I , l'intégrale du départ, existe.

II.F.4) $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{x} dx.$

En effet, ces deux intégrales de fonctions positives convergent, par exemple par comparaison,

à l'infini. Dans la deuxième intégrale, on pose : $u = (n+1)x$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

On regroupe ces deux dernières intégrales :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

II.F.5) On a facilement : $1 \geq e^{-x} \geq 1 - x$, pour $x \geq 0$, qui entraîne : $\frac{1}{x} \geq \frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x} - 1$.

On intègre entre ε et $(n+1)\varepsilon$, ce qui donne :

$$\ln(n+1) \geq \int_{\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx \geq \ln(n+1) - n\varepsilon.$$

La limite de l'intégrale quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est donc : $\ln(n+1)$,

mais c'est aussi : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx$ par convergence de cette intégrale en 0.

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \ln(n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{II.F.6)} \quad \left| \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx \right| &\leq \int_0^{+\infty} |e^{-(n+1)x} \Phi(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} |e^{-(n+1)x} K| dx \\ &\leq K \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx \leq \frac{K}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } I = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$$

Ce qui prouve que : $I = \gamma$.

III Troisième partie

III.A -

III.A.1) Soit $0 < x < 1$, alors : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge (absolument), et $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n$ converge par comparaison.

Ce qui prouve que : $R_b \geq 1$.

III.A.2) Pour $0 \leq x < 1$, on a la convergence absolue de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

$$\text{Ce qui donne : } |v(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n = \sum_{n=0}^N |b_n| x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| x^n.$$

Si on prend N assez grand pour avoir : $\forall n > N, \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

ce qui est possible car ce quotient tend vers 0, alors :

$$|v(x)| \leq \sum_{n=0}^N |b_n| x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{\varepsilon}{2} x^n \leq \sum_{n=0}^N |b_n| + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\varepsilon}{2} x^n \leq \sum_{n=0}^N |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x).$$

$$\text{III.A.3)} \quad u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty, \text{ donc, pour } x \text{ assez proche de } 1, \quad \frac{\sum_{n=0}^N |b_n|}{u(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne alors : $|v(x)| \leq \varepsilon u(x)$.

Mais, on pouvait choisir ε aussi petit que l'on veut, et donc : $v(x) = o(u(x))$.

III.B On pose $c_n = a_n - b_n$, et, $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, clairement : $w(x) = u(x) - v(x)$.

Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on a : $c_n = o(a_n)$, et, $w(x) = u(x) - v(x) = o(u(x))$.

Ce qui équivaut à : $v(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} u(x)$.

III.C Application 1 :

III.C.1) On obtient ce rayon de convergence classiquement par application du théorème de d'Alembert.

Calculons d'abord : $\ln \left(\text{ch} \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

$$\frac{(n+1)^3 \ln \left(\text{ch} \frac{1}{n+1} \right)}{n^3 \ln \left(\text{ch} \frac{1}{n} \right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow 1, \text{ d'où : } R = 1.$$

III.C.2) On a donc : $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln \left(\text{ch} \frac{1}{n} \right) x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} x^n \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$.

Mais $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$ est la dérivée de $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Enfin : } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln \left(\text{ch} \frac{1}{n} \right) x^n \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{2(1-x)^2}.$$

III.D Application 2 :

III.D.1) La limite finie de (w_n) et infinie de $\ln n$ entraîne : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Les deux séries entières ont donc le même rayon de convergence.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right| = 1$, ce rayon de convergence est égal à 1.

On travaille donc maintenant avec $x \in]-1, 1[$.

On remarquera sans le rappeler à chaque fois que toutes les séries utilisées convergent au moins sur cet intervalle.

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} H_{n+1} x^{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\text{En effet : } H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} H_n x^n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

III.D.2) On sait déjà que : $\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$.

$$\text{Or : } \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

$$\text{On en déduit : } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

III.E Application 3 :

$$\text{III.E.1)} \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} = (1-a^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On sait développer cette expression en série entière pour $|ax| < 1$.

On prend donc $x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$, le rayon de convergence est bien sûr $R = \frac{1}{a}$.

$$\begin{aligned} (1 - a^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-1)^n a^{2n} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} a^{2n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} a^{2n} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} I_{2n} a^{2n} x^{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} a^{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

III.E.2) On a donc : $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} x^{2n} \cos^{2n}(t).$

Cette dernière série est une série trigonométrique, de variable t , dont la somme est une fonction continue, c'est donc la série de Fourier de cette fonction continue. On peut donc par ailleurs intégrer terme à terme cette série de Fourier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cela donne :

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (I_{2n})^2 x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{2n} x^{2n}$$

pour : $a_n = \frac{2}{\pi} I_{2n}.$

Sauf erreur de ma part, l'énoncé semble s'être pris les pieds dans le tapis.

III.E.3) $\frac{2}{\pi} (I_{2n})^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n},$ et : $-\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n},$

ce qui entraîne : $J(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln 2}{2} \ln(1 - x).$

On a bien : $K = -\frac{\ln 2}{2}.$

IV Quatrième partie

IV.A $(1 - x) \sum_{p=0}^n A_p x^p = \sum_{p=0}^n A_p x^p - \sum_{p=0}^n A_p x^{p+1} = \sum_{p=0}^n A_p x^p - \sum_{p=1}^{n+1} A_{p-1} x^p$

$$= A_0 + \sum_{p=1}^n (A_p - A_{p-1}) x^p - A_n x^{n+1} = A_0 + \sum_{p=1}^n a_p x^p - A_n x^{n+1}.$$

Mais $A_0 = a_0 = a_0 x^0 !$

On a donc bien : $(1 - x) \sum_{p=0}^n A_p x^p = \sum_{p=0}^n a_p x^p - A_n x^{n+1}.$

Premièrement, comme $\sum a_n$ diverge, $\sum A_n$ diverge par comparaison, puisque $0 \leq a_n \leq A_n$. Le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est donc inférieur ou égal à 1.

Deuxièmement, pour $0 \leq x < 1$, fixé, on a : $\sum_{p=1}^n A_p x^p \leq \frac{\sum_{p=1}^n a_p x^p}{1 - x} \leq \frac{\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p}{1 - x}.$

La suite $\left(\sum_{p=1}^n A_p x^p \right)$ est donc croissante majorée, ce qui prouve qu'elle converge.

Le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est donc supérieur ou égal à 1.

On conclut que le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est bien égal à 1.

IV.B Pour $x \in]-1, 1[$, toutes les séries convergent et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x^n = 0$, de même pour la limite de $A_n x^{n+1}.$

On en déduit : $(1 - x) \sum_{p=0}^{\infty} A_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p,$ et enfin : $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1 - x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$

On travaille toujours avec $x \in]-1, 1[$.

$A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$ prouve que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ est aussi 1.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n x^{n+1} = 0$

On a aussi : $(1-x) \sum_{p=0}^n B_p x^p = \sum_{p=0}^n b_p x^p - B_n x^{n+1}$, sur lequel on peut faire le même passage à

la limite... qui prouve au passage la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$!...

On conclut : $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Maintenant, appliquons la partie précédente avec A_n et B_n à la place de a_n et b_n .

On obtient : $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$,

et en multipliant par $(1-x)$ ces deux termes : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

IV.C Application 1 :

Rappelons que le rayon de convergence d'une série entière est aussi :

$\sup\{r \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0\}$. On garde la notation r pour un réel positif.

Or : $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{a^n} = 0 \Leftrightarrow r < 1 \right)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n}$ est 1.

Soit n et p deux entiers naturels. On pose : $a_n = 1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \mid n = a^p$, et $a_n = 0$ sinon.

$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ revient à compter le nombre de k tels que $a^k \leq n$; c'est à dire tels que : $k \leq \frac{\ln n}{\ln a}$.

On en déduit : $A_n = \text{Ent} \left(\frac{\ln n}{\ln a} \right)$.

On obtient facilement : $A_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln a}$.

En utilisant la partie précédente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\ln a} \sum_{n=0}^{\infty} (\ln n) x^n \underset{1^-}{\sim} -\frac{1}{\ln a} \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \underset{1^-}{\sim} -\frac{1}{\ln a} \ln(1-x).$$

$$L = -\frac{1}{\ln a} \text{ convient.}$$

IV.D Application 2 :

IV.D.1) Pour $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$, en multipliant et en divisant par la quantité conjuguée.

Cela donne un rayon de convergence de 1 par application simple du théorème de d'Alembert.

Pour $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$, on utilise le même théorème qu'à la question précédente... avec la même notation r pour désigner un réel positif.

Or : $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n^2} = 0 \Leftrightarrow r < 1 \right)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ est bien 1.

Soit n et p deux entiers naturels. On pose : $a_n = 1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} / n = p^2$, et $a_n = 0$ sinon.

$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ revient à compter le nombre de k tels que $k^2 \leq n$; c'est à dire tels que : $k \leq \sqrt{n}$.

On en déduit : $A_n = \text{Ent}(\sqrt{n})$.

On obtient facilement : $A_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

En posant : $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on obtient : $B_n = \sqrt{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Ce qui donne : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$.

IV.D.2) $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, d'où $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{I_n}{\sqrt{2\pi}}$.

Ce qui donne : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.

IV.D.3) Pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x \cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos^n t$.

On a ainsi encore une fonction continue égale à la somme d'une série trigonométrique. Cette série trigonométrique est donc sa série de Fourier... que l'on peut intégrer terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x \cos t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.

IV.D.4) On pose d'abord $u = \tan \frac{t}{2}$, ce qui donne après un peu de calcul :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x \cos t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2} du = \frac{2}{1+x} \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2 + u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \left[\arctan u \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\underset{1^-}{\sim} \frac{2}{\sqrt{2(1-x)}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

On a donc : $\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n \underset{1^-}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Et enfin : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$D = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ convient.

Tout ceci sauf erreur de calcul de ma part. Si un collègue de TSI a une classe où un nombre significatif d'élèves peut faire une partie significative de ce problème... j'échange mes élèves contre les siens quand il veut !