

I Courbe soumise à une condition

- Modulo π , par rapport à $\vec{i}$, la normale à la tangente fait un angle de $\theta + V + \frac{\pi}{2}$ qui doit être égal à 3θ .

Cela donne bien $V = 2\theta + \frac{\pi}{2}$ modulo π .

- Dans la mesure où elle est définie, on a : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \tan\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

Ce qui donne $\rho' \cos 2\theta + \rho \sin 2\theta = 0$.

Si $\sin 2\theta = 0$, on a bien $V = \frac{\pi}{2}$ modulo π , et $\tan V$ n'est pas définie. Ce qui correspond à $\rho' = 0$. On a bien l'équivalence demandée.

- $\mathcal{E}$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants et sans second membre. Les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc, sur un intervalle où $\cos 2\theta$ ne s'annule pas, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\exp\left(-\int \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} d\theta\right)$.

L'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ convient, $\cos 2\theta > 0$, et donc $f(\theta) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2} \ln(\cos 2\theta)\right) = \lambda \sqrt{\cos 2\theta}$ qui vérifie bien la condition initiale.

- Finalement $f_\lambda(\theta) = \lambda \sqrt{\cos 2\theta}$.

La courbe d'équation polaire $\rho = \mu \sqrt{\cos 2\theta}$ est clairement homothétique de la courbe d'équation polaire $\rho = \lambda \sqrt{\cos 2\theta}$ de rapport $\frac{\mu}{\lambda}$.

- On calcule d'abord $f'_\lambda(\theta) = -\lambda \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} f'_\lambda(\theta) = \pm\infty$ selon le signe de λ . En aucun cas on ne pourra prolonger f_λ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$\mathcal{E}$ n'a donc pas de solution non nulle sur $\mathbb{R}$.

-

- On pose $f_1(\theta) = 1 + a\theta + b\theta^2 + c\theta^3 + o(\theta^3)$ et $f'_1(\theta) = a + 2b\theta + 3c\theta^2 + o(\theta^2)$, on écrit aussi $\cos 2\theta = 1 - 2\theta^2 + o(\theta^2)$ et $\sin 2\theta = 2\theta + o(\theta^2)$.

On reporte ces quatre développements dans l'équation différentielle en ne gardant que les termes jusqu'au rang 2, on obtient : $0 = a + 2(b+1)\theta + 3c\theta^2 + o(\theta^2)$.

Ce qui donne $a = 0$, $b = -1$, et $c = 0$. Finalement $f_1(\theta) = 1 - \theta^2 + o(\theta^3)$.

- $\cos 2x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} u^k + o(u^n)$.

D'où $\sqrt{\cos 2\theta} = (1 - 2\theta^2 + o(\theta^3))^{\frac{1}{2}} = 1 - \theta^2 + o(\theta^3)$ beaucoup plus simplement. On doit quand même noter que dans la question précédente, on n'avait pas eu à résoudre l'équation différentielle...

- On a : $f_1(\theta) = 1 + f'_1(0)\theta + \frac{f''_1(0)}{2}\theta^2 + \frac{f'''_1(0)}{6}\theta^3 + o(\theta^3)$ par la formule de Taylor.

Ce qui donne : $f'_1(0) = 0$, $f''_1(0) = -2$ et $f'''_1(0) = 0$.

II Le lemniscate de Bernoulli

-

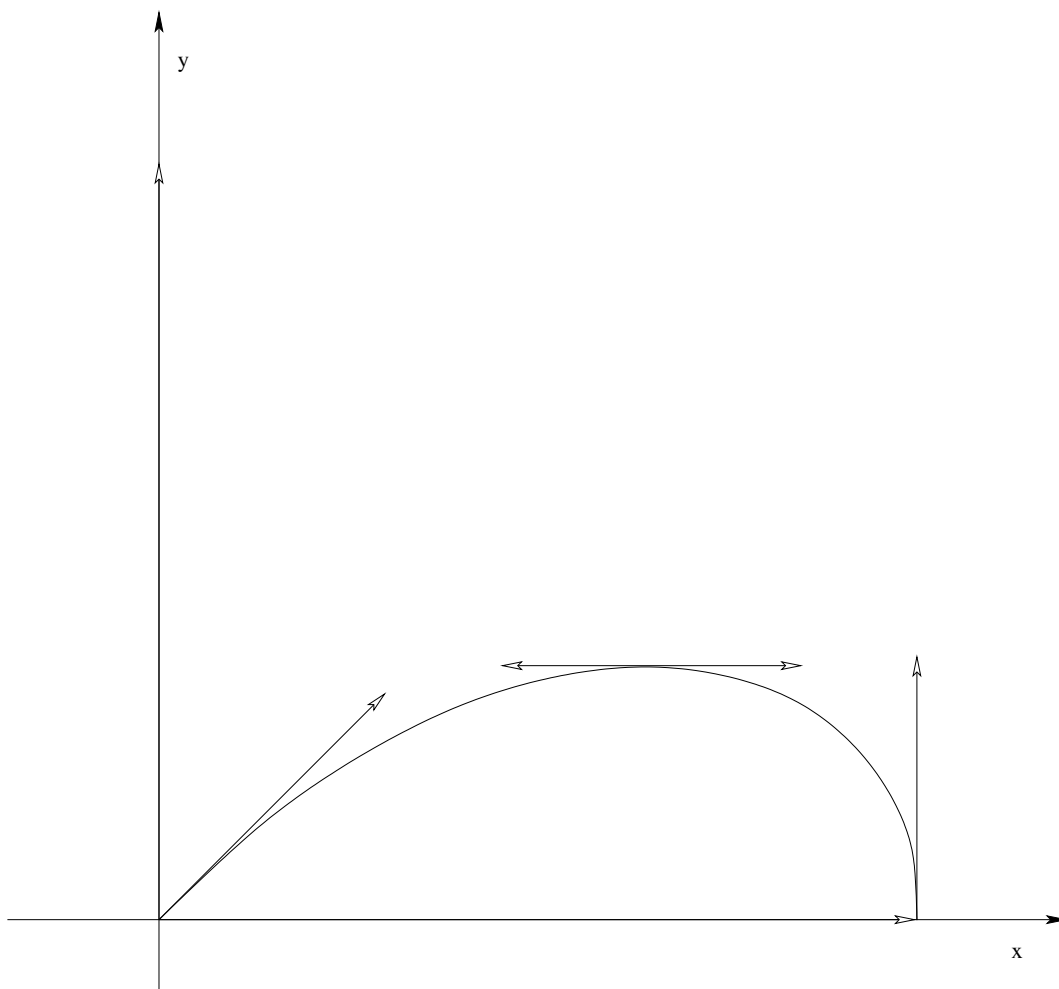
- Si on change θ en $-\theta$, $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ ne change pas et donc $\mathcal{C}_1$ présente une symétrie par rapport à l'axe Ox et on peut limiter l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$, on a $\rho \rightarrow 0$, la courbe est à l'origine.

D'autre part, $\rho' = -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et donc $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ qui tend vers 0 en $\frac{\pi}{4}$, la tangente est dans la direction du rayon vecteur.

C'est d'ailleurs toujours le cas à l'origine en polaire quand ρ est continue.

Il ne reste qu'à tracer le graphe, ici on n'en a tracé que la moitié.



- 1.2.** On pourrait chercher les extrémums de $y = \rho \cos \theta$ et de $x = \rho \sin \theta$ pour avoir les tangentes horizontales et verticales.

On va plutôt utiliser la première partie : pour une tangente horizontale, la normale est verticale et réciproquement.

Une tangente verticale correspond donc à $3\theta = 0_{[\pi]}$, c'est à dire $\theta = 0$ dans notre intervalle.

Une tangente horizontale correspond donc à $3\theta = \frac{\pi}{2}_{[\pi]}$, c'est à dire $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$ dans notre intervalle.

Le point à tangente verticale est de coordonnées $(0, 1)$.

Les points à tangente horizontales sont les intersections de la courbe avec les droites d'équation $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$.

- 1.3.** Le repère de Frénet pour $\theta = 0$ est donné par $\vec{T} = \vec{j}$ et $\vec{N} = -\vec{i}$. En effet, $V = \frac{\pi}{2}$ et on se place dans le sens des θ croissants.

Le rayon de courbure est donné par $R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

Pour $\theta = 0$, on a $\rho = 1$, $\rho' = 0$ et $\rho'' = -2$, ce qui donne $R = \frac{1}{3}$.

Le centre de courbure est donc en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

2. $\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ est continue donc localement intégrable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

La fonction est paire, donc le problème d'intégrabilité est le même en $\pm\frac{\pi}{4}$, et si ces intégrales convergent,

$$\text{on aura } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta.$$

Enfin, la fonction est positive et on va travailler par équivalence en $\frac{\pi}{4}^-$.

$$\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}} \underset{\frac{\pi}{4}^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dont l'intégrale en $\frac{\pi}{4}^-$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

3. On a $L_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = L = I$
car cette intégrale converge.

4. -

4.1. On a $L = I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$.

On pose $\varphi = 2\theta$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, et comme $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$ converge, $L = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} d\varphi$.

- 4.2. On pose maintenant $u = \sqrt{\cos \varphi}$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} d\varphi$ converge.

$$u^2 = \cos \varphi, \text{ et donc } 2u du = -\sin \varphi d\varphi$$

$$\text{et comme, sur l'intervalle } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - u^4},$$

$$\text{on a : } L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} d\varphi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^4}} du.$$

5. Δ est le domaine géométrique dont on cherche l'aire. En polaires $A = \iint_{\Delta} \rho d\rho d\theta$.

$$\text{Il nous faut décrire } \Delta \text{ en polaires : } M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \theta \in \left[0, \sqrt{\cos 2\theta}\right] \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{1}{4} \sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

III Fonction β d'Euler

1. La fonction $t \rightarrow t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, 1[$, le problème de convergence est en 0 et en 1. La fonction est positive, donc on peut, et on va, travailler par équivalence.

$$t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \text{ dont l'intégrale converge en } 0^+ \text{ si et seulement si } \alpha > 0.$$

$$t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{\beta-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-\beta}} \text{ dont l'intégrale converge en } 1^- \text{ si et seulement si } \beta > 0.$$

$B(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

2. Dans $B(\alpha, \beta)$ on pose $u = 1 - t$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, convergentes et égales.

$$B(\alpha, \beta) = - \int_1^0 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} du = B(\beta, \alpha)$$

3. On pose $t = \sin^2 \theta$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, convergentes et égales.

$$dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\text{et donc : } B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(\alpha-1)} \theta (1 - \sin^2 \theta)^{\beta-1} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{2\beta-1} \theta d\theta.$$

4. Calculons : $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta = L$

IV Algorithmique

1. -

1.1. $n = 1$,

pour M_0^1 , on a $k = 0$ et donc $\theta = 0$, M_0^1 est de coordonnées $(1, 0)$,

pour M_1^1 , on a $k = 1$ et donc $\theta = \frac{\pi}{4}$, M_1^1 est de coordonnées $(0, 0)$.

$2L_1 = 2$, la figure est laissée au lecteur.

1.2. $n = 2$,

pour M_0^2 , on a $k = 0$ et donc $\theta = 0$, M_0^2 est de coordonnées $(1, 0)$,

pour M_1^2 , on a $k = 1$

$$\text{et donc } \theta = \frac{\pi}{8}, M_1^2 \text{ est de coordonnées } \left(\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{8}, \sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{8} \right) \simeq (0.78, 0.32),$$

pour M_2^2 , on a $k = 2$ et donc $\theta = \frac{\pi}{4}$, M_2^2 est de coordonnées $(0, 0)$,

$$\left\| \overrightarrow{M_0^2 M_1^2} \right\| = \sqrt{\left(\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left(\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{8} - 1 \right)^2} \simeq 0.39$$

$$\left\| \overrightarrow{M_1^2 M_2^2} \right\| = \sqrt{\left(\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left(\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{8} \right)^2} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} \simeq 0.84$$

Et finalement, $2L_1 \simeq 2.46$, la figure est encore laissée au lecteur.

- 1.3. Pour la figure, on reporte à partir de l'origine les angles $0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}$, les points M_k^n cherchés sont les intersections avec la courbe. On relie ces points pour avoir les segments demandés.

2. On va travailler en maple, les calculs étant pénibles à écrire en ligne, nous allons structurer le calcul.
On va d'abord créer 2 procédures $X(k,n)$ et $Y(k,n)$ qui calculent les coordonnées de M_k^n .

```
> X:=proc(k,n);
    sqrt(cos(k*Pi/2/n))*cos(k*Pi/4/n)
end;
> Y:=proc(k,n);
    sqrt(cos(k*Pi/2/n))*sin(k*Pi/4/n)
end;
```

On va maintenant écrire une procédure $l(k,n)$ qui calcule la longueur approchée du segment $M_{k-1}^n M_k^n$.

```
> l:=proc(k,n);
    evalf(sqrt((X(k,n)-X(k-1,n))**2+(Y(k,n)-Y(k-1,n))**2))
end;
```

On écrit alors la procédure $L(p)$ qui calcule $2L_{2^p}$.

```
> L:=proc(p)
    local S,i;
    S:=0;
    for i from 1 to 2**p do
        S:=S+l(i,2**p)
    od;
    2*S;
end;
```

On peut maintenant écrire la procédure demandée :

```
> CCP_TSI_2002_2:=proc()
    local A,B,i;
    A:=2;print(A);
    B:=L(2);print(B);
    for i from 3 while abs(B-A)>0.001 do
        A:=B;B:=L(i);print(B);
    od;
    'terminé'
end;
```

On affiche "terminé" à la fin du calcul, pour éviter la répétition du dernier résultat !...

D'autre part, on n'a pas ici utilisé l'astuce classique de travailler avec 2^p points qui permet à chaque étape de réutiliser les points précédents...

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

<http://c.caignaert.free.fr>