

**Corrigé de la première épreuve de mathématique  
Mines-Ponts MP 2021**

## 1 Introduction

Ce problème va nous permettre de démontrer par des techniques élémentaires mais astucieuses un théorème très important, le théorème d'approximation Gaussienne des lois binomiales, j'invite les lecteurs intéressés à consulter l'article de Léonard Gallardo et Emmanuel Lesigne publié dans la revue de la filière mathématiques RMS volume 116 n :1, on y trouvera une autre approche qui ne sort pas du cadre du programme.

Je vous souhaite bonne lecture.

## 2 Résultats Préliminaires

1)

La formule de Stirling :  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}$

Il existe donc une suite  $(\lambda_n)_n$  qui converge vers 1 tel que :  $n! = \lambda_n n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}$  et on pose  $\epsilon_n = \lambda_n - 1$

2)

On sait que pour tout réel  $t$  on a :  $[t] \leq t < [t] + 1$  qu'on écrit :  $t - 1 < [t] \leq t$

$\lambda x + \mu - 1 < [\lambda x + \mu] \leq \lambda x + \mu \implies 1 + \frac{\mu - 1}{x\lambda} < \frac{[\lambda x + \mu]}{x\lambda} \leq 1 + \frac{\mu}{x\lambda}$  (On peut diviser sans changer les inégalités car  $\lambda > 0$  on prend  $x > 0$ ).

On fait tendre  $x$  vers  $+\infty$  et on trouve le résultat.

On a encore :  $[t] - 1 < t \leq [t]$ , et on fait de même.

3)

La fonction  $\Phi$  est paire (on travaille seulement sur  $[0, +\infty[$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , donc pas de problème sur  $[0, 1]$ , et au voisinage de l'infini :  $\Phi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

4)

$\zeta(x) = (x + 1) \ln(1 + x)$   $x \in ]-1, +\infty[$ .

Au voisinage de 0 on a :  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  et on trouve facilement la formule.

## 3 Étude asymptotique d'une suite

5)

La variable  $X_n$  suit la loi binomiale  $B(n, p)$ , pour  $0 \leq k \leq n$  on pose  $u_k = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(n-k)p}{kq}$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1 \iff (n-k)p \geq kq \iff k \leq np.$$

la famille  $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$  est croissante puis décroissante, son maximum est donc atteint quand  $k$  prend l'entier qui vient juste après  $np$  et n'oublier pas que  $0 < q < 1$ .

6)

$x_n = \lceil np - q \rceil$  on a donc :  $\lceil np - q \rceil - 1 < np - q \leq \lceil np - q \rceil$  ce qui donne :

$$np - q \leq x_n < np - q + 1 \quad nq + q - 1 < n - x_n \leq nq + q$$

Et on obtient les limites.

$$\sqrt{npq}p_n = \sqrt{npq} \binom{n}{x_n} p^{x_n} q^{n-x_n} = \sqrt{npq} \frac{n!}{x_n!(n-x_n)!}$$

En utilisant la formule de Stirling on peut écrire :

$$x_n! \sim x_n^{x_n} e^{-x_n} \sqrt{2\pi x_n} \quad (n-x_n)! \sim (n-x_n)^{n-x_n} e^{-(n-x_n)} \sqrt{2\pi(n-x_n)}$$

Comme :  $x_n \sim np$   $n-x_n \sim nq$  on peut alors simplifier et trouver la formule souhaitée.

7)

$$np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right) = x_n \ln(x_n) - x_n \ln(np) = \ln\left(\frac{x_n^{x_n}}{n^{x_n} p^{x_n}}\right).$$

$$nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = (n-x_n) \ln\left(\frac{n-x_n}{nq}\right) = (n-x_n) \ln(n-x_n) - (n-x_n) \ln(nq) = \ln\left(\frac{(n-x_n)^{n-x_n}}{n^{n-x_n} q^{n-x_n}}\right)$$

$$e^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)} = \frac{n^{x_n} p^{x_n}}{x_n^{x_n}} \frac{n^{n-x_n} q^{n-x_n}}{(n-x_n)^{n-x_n}} = \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}$$

8)

Dans la question 6 on a :

$$np - q \leq x_n < np - q + 1 \quad \Rightarrow \quad -q \leq x_n - np < -q + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_n - np}{n} \rightarrow 0$$

$$np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = np\left(\frac{x_n - np}{np}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_n - np}{np}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = x_n - np + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = np - x_n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

En combinant les questions 6 et 7 on trouve :

$$\sqrt{npq}p_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

9)

$$X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \mathbb{E}(X_n) = np \quad \mathbb{V}(X_n) = npq$$

$$Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 \leq k \leq n \right\} \quad \mathbb{P}(Y_n = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = 0 \quad (\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b)$$

$$\mathbb{V}(Y_n) = 1 \quad (\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)).$$

10)

$$\tau_{n,0} = -\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \rightarrow -\infty$$

Il existe alors un entier non nul  $N_1$  tel que  $\forall n \geq N_1$  on a  $\tau_{n,0} \leq a$

$$\tau_{n,n} = \frac{\sqrt{npq}}{\sqrt{p}} \longrightarrow +\infty$$

Il existe alors un entier non nul  $N_2$  tel que  $\forall n \geq N_2$  on a  $\tau_{n,n} \geq b$

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} \longrightarrow 0$$

On prend  $\epsilon = b - a$ , Il existe alors un entier non nul  $N_3$  tel que  $\forall n \geq N_3$  on a  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$

On prend alors  $N = \max(N_1, N_2, N_3)$ .

11)

$\mathbb{R} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}} \right[$  Pour  $t \in \left[ \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}} \right[$  on a :

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq t < \frac{k + 1 - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow k \leq t\sqrt{npq} - np < k + 1 \Rightarrow k_n(t) = k$$

La fonction  $k_n$  est croissante en escalier sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même pour  $e_n$ .

$$k_n(t) \leq t\sqrt{npq} + np < k_n(t) + 1 \Rightarrow k_n(t) - np \leq t\sqrt{npq} < k_n(t) - np + 1$$

On divise par le terme strictement positif  $\sqrt{npq}$  et on trouve le résultat.

La suite de fonctions  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction identité.

12)

$$\tau_{n,k_n(a)} = e_n(a) \longrightarrow a \quad \tau_{n,k_n(b)+1} = \tau_{n,k_n(b)} + \frac{1}{\sqrt{npq}} \longrightarrow b.$$

On note  $I_{k_n} = [\tau_{n,k_n(a)}, \tau_{n,k_n(b)+1}]$  et  $h_n = \chi_n \Phi$ , où  $\chi_n$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $I_n$ . (pour un ensemble  $A$   $\chi_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et 0 sinon)

On peut facilement démontrer que la suite de fonctions  $(h_n)_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $h = \chi_{[a,b]} \Phi$  et on a :

$$|h_n(t)| \leq \Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La fonction  $\Phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on peut donc utiliser le théorème de la convergence dominée :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(t) \Phi(t) dt = \int_a^b \Phi(t) dt$$

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \int_{\frac{k_n(a)-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_n(b)+1-np}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt = \sum_{i=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\frac{i-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{i+1-np}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt$$

Sur chaque intervalle  $\left[ \frac{i - np}{\sqrt{npq}}, \frac{i + 1 - np}{\sqrt{npq}} \right[$  la fonction  $f_n$  est constante et sa valeur est

$$\sqrt{npq} \mathbb{P}(Y_n = \frac{i - np}{\sqrt{npq}})$$

et la longueur de l'intervalle est  $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ .

On trouve donc :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \sum_{i=k_n(a)}^{k_n(b)} \mathbb{P}(Y_n = \frac{i - np}{\sqrt{npq}}) = \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b))$$

13)

Pour  $0 \leq k \leq n - 1$   $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} \mathbb{P}(X_n = k) = \sqrt{npq} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$

On remplace  $n!$  par  $n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi} (1 + \epsilon_n)$  et on fait de même pour  $k!$  et  $(n - k)!$ , on trouve le résultat.

14)

On rappelle :  $k_n(t) \leq t\sqrt{npq} + np < k_n(t) + 1$  ce qui nous permet d'écrire

$$t\sqrt{npq} + np - 1 < k_n(t) \leq t\sqrt{npq} + np \implies \frac{k_n(t)}{np} \longrightarrow 1$$

On a encore :  $nq - \sqrt{npqt} \leq n - k_n(t) < nq - \sqrt{npqt} + 1$ , on trouve alors  $\frac{n - k_n(t)}{nq} \longrightarrow 1$

En combinant les deux on a le résultat.

$n - k_n(t) \longrightarrow +\infty$  de même  $k_n(t) \longrightarrow +\infty$ .

On sait déjà que  $\epsilon_n \longrightarrow 0$ . On peut donc conclure.

15)

La condition prise c'est pour qu'on reste dans le domaine de définition de  $\zeta$ .

$$\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k}\right) = \zeta\left(\frac{k-np}{np}\right) = \left(1 + \frac{k-np}{np}\right) \ln\left(1 + \frac{k-np}{np}\right) = \frac{k}{np} \ln\left(\frac{k}{np}\right)$$

On a alors :

$$-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k}\right) = \ln\left(\frac{n^k p^k}{k^k}\right)$$

$$\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k}\right) = \zeta\left(1 - \frac{k-np}{nq}\right) = \frac{n-k}{nq} \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right)$$

On peut donc écrire :

$$-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k}\right) = \ln\left(\frac{n^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}\right)$$

On passe à l'exponentielle.

16)

$$\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)}\right) = \zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} e_n(t)\right) = \sqrt{\frac{q}{np}} e_n(t) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{q}{np}} e_n(t)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k_n(t)}\right) = \zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} e_n(t)\right) = -\sqrt{\frac{p}{nq}} e_n(t) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{p}{nq}} e_n(t)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On combine alors les deux :

$$-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k_n(t)}\right) = -\frac{(e_n(t))^2}{2} + o(1) \longrightarrow -\frac{t^2}{2}$$

Et on passe à l'exponentielle.

17)

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npqt} + np \rfloor \implies t \in \left[ \tau_{n,k_n(t)}, \tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{\sqrt{npq}} \right[.$$

La fonction  $e_n$  est en escalier, constante sur cet intervalle, on a donc :

$$e_n(t) = e_n(\tau_{n,k_n(t)}) = \tau_{n,k_n(t)}$$

$$f_n(t) = f_n(\tau_{n,k_n(t)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} \frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_{k_n(t)})(1 + \epsilon_{n-k_n(t)})}$$

En utilisant les questions 14 et 16 on trouve la convergence simple de  $(f_n)_n$  vers  $\Phi$ .

Pour intervertir la limite et l'intégrale, on doit penser conformément au programme au théorème de la convergence dominée. En effet on a la convergence simple de la suite  $(f_n)_n$  vers la fonction  $\Phi$ . L'hypothèse de la domination :

D'après la question 8, la suite  $(\sqrt{npqp_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente, donc elle est bornée, il existe alors  $M > 0$  tel que :

$$0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{npqp_n} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [a, b]$$

La fonction constante est intégrable sur  $[a, b]$ , on peut donc conclure.

18)

Pour :  $\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) \rightarrow \int_a^b \Phi(t)dt$ , on va utiliser la question 12 et refaire une démonstration analogue en multipliant par des fonctions indicatrices adaptées et se servir de la domination qu'on a établi dans la question 17.

D'après la question 11 :  $e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$  pour tout réel  $t$ .

Pour  $n$  assez grand on a  $\frac{1}{\sqrt{npq}} < b - a$  ce qui nous permet d'écrire :

$$e_n(a) \leq a < b - \frac{1}{\sqrt{npq}} < e_n(b) \leq b$$

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n < a) + \mathbb{P}(a \leq Y_n \leq b) - \mathbb{P}(e_n(b) < Y_n \leq b)$$

On majore d'abord le premier terme de la somme à droite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n < a) &= \mathbb{P}\left(\frac{k_n(a) - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n(a) - np}{\sqrt{npq}} < a\right) \\ &= \mathbb{P}(k_n(a) \leq X_n < a\sqrt{npq} + np) \end{aligned}$$

Comme on a :  $k_n(a) \leq a\sqrt{npq} + np < k_n(a) + 1$ , et la variable  $X_n$  ne prend que des valeurs entières, elle prend alors au plus une valeur dans cet intervalle et on a :

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n < a) \leq \mathbb{P}(X_n = k_n(a)) \leq p_n \leq \frac{M}{\sqrt{npq}} \rightarrow 0$$

La constante  $M$  est celle introduite dans la question 17.

Un raisonnement analogue reste valable pour le troisième membre de la somme. On conclut alors en utilisant la première partie de cette question.

19)

Si on prend  $a = -T$  et  $b = T$  on écrit :

$$\mathbb{P}(-T \leq Y_n \leq T) = 1 - \mathbb{P}(|Y_n| > T) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{T^2}$$

(on a utilisé l'inégalité de bienaymé-Tchebychev).

$\mathbb{V}(Y_n) = 1$  (voir question 9)

On a donc :  $\mathbb{P}(-T \leq Y_n \leq T) \geq 1 - \frac{1}{T^2}$  et on fait tendre  $n$  vers l'infini en utilisant la question 18.

$$1 - \frac{1}{T^2} \leq \mathbb{P}(-T \leq Y_n \leq T) \leq 1$$

En passant à la limite d'abord sur  $n$  puis sur  $T$  on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = 1$$

20)

La suite  $(\mathbb{P}(Y_n \leq b))_n$  est une suite bornée , on va démontrer juste qu'elle admet une seule valeur d'adhérence .

Soit  $L$  la plus grande valeur d'adhérence , il existe alors une sous suite  $(\mathbb{P}(Y_{\varphi(n)} \leq b))_n$  qui converge vers  $L$  , d'autre part on a :

$$\mathbb{P}(Y_{\varphi(n)} \leq b) \geq \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(b - k - 1 < Y_{\varphi(n)} \leq b - k) \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

On fixe  $r$  et on fait tendre  $n$  vers l'infini on trouve :

$$L \geq \int_{b-r-1}^b \Phi(t) dt \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

On en déduit que

$$L \geq \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$$

On démontre de même que la plus grande valeur d'adhérence de la suite  $(\mathbb{P}(Y_n > b))_n$  est supérieur à

$$\int_b^{+\infty} \Phi(t) dt$$

Comme on a  $\mathbb{P}(Y_{\varphi(n)} \leq b) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > b)$  et la valeur de l'intégrale est 1 ,on conclut facilement que la suite  $(\mathbb{P}(Y_{\varphi(n)} \leq b))_n$  admet une seule valeur d'adhérence à savoir  $\int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$  , elle converge donc vers cette valeur.

La suite  $(\mathbb{P}(Y_{\varphi(n)} \geq a))_n$  converge vers  $\int_a^{+\infty} \Phi(t) dt$

21)

$\varphi$  est strictement monotone , on discute suivant la monotonie et on fait un changement de variable.