Mines PSI 2 - 2009
Un corrigé

1 Polynômes d'Hermite.

1. Le calcul donne immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_0(x) = 1 \ \text{ et } \ h_1(x) = x$$

Par ailleurs, pour tout entier n et tout réel x,

$$\begin{aligned} h_n'(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2}\left(2xD^n(e^{-x^2}) - D^{n+1}(e^{-x^2})\right) \\ &= 2xh_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} e^{x^2} D^{n+1}(e^{-x^2}) \end{aligned}$$

En remplaçant $D^{n+1}(e^{-x^2})$ par son expression en fonction de $h_{n+1}(x)$, on obtient

$$h_n'(x) = 2xh_n(x) + 2h_{n+1}(x)$$

ce qui correspond à la formule demandée.

2. On montre alors par récurrence sur n que h_n est un polynôme unitaire de degré n.
   - La propriété est initialement vraie ($h_0 = 1$).
   - Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang n. La question précédente donne

   $$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - \frac{1}{2}h_n'(x)$$

   Comme $h_n'(x)$ est de degré $\leq n-1$ et que $xh_n(x)$ est de degré $n+1$, $h_{n+1}(x)$ est de degré $n+1$ et le coefficient de x^{n+1} dans h_{n+1} est le même que dans $xh_n(x)$ et vaut donc 1. Ceci montre le résultat au rang $n+1$.

3. On remarque tout d'abord que pour $n \geq 1$ (et avec la formule de Leibnitz)

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2} D^n(-2xe^{-x^2}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2}\left(-2xD^n(e^{-x^2}) - 2nD^{n-1}(e^{-x^2})\right) \\ &= xh_n(x) - \frac{n}{2}h_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Remarque : j'anticipe ici sur la question 5 *et la formule* (4) *mais c'est la première méthode qui me vient à l'esprit.*

On prouve alors par récurrence sur n la formule (2).
   - La formule est vraie aux rang 0 et 1 (vérification immédiate).
   - Soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. On remarque que (formule de Leibnitz encore)

   $$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} e^{-(x-t)^2} = \frac{d^n}{dt^n}(2(x-t)e^{-(x-t)^2}) = 2(x-t)\frac{d^n}{dt^n}e^{-(x-t)^2} - 2n\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{-(x-t)^2}$$

   On applique ceci en $t = 0$ et on utilise l'hypothèse aux rang n et $n-1$ pour obtenir

   $$\left.\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} = 2^{n+1}e^{-x^2}\left(xh_n(x) - \frac{n}{2}h_{n-1}(x)\right)$$

   Compte-tenu de la remarque initiale, on obtient la fomule au rang $n+1$.

4. On a
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_x(t) = e^{-x^2} e^{2tx} e^{-t^2}$$
$t \mapsto e^{2tx}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont DSE de rayon de convergence infini (on obtient leur développement avec celui de l'exponentielle). Il en est alors de même de leur produit (le développement s'obtenant avec un produit de Cauchy) et donc de f_x (on multiplie par une constante). f_x est donc DSE de rayon de convergence infini. Son développement est alors celui de Taylor :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_x^{(k)}(0)}{k!} t^k$$
Avec la question précédente, on a donc
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k h_k(x) e^{-x^2}$$
5. La formule (4) a été prouvée en question 3 pour $n \geq 1$. Avec la convention choisie, elle reste vraie pour $n = 0$ (vérification immédiate).
6. A l'aide des formules (1) et (4), on obtient exactement la relation demandée.
7. La formule (4) appliquée en $x = 0$ donne
$$\forall n \in \mathbb{N},\ h_{n+1}(0) = -\frac{n}{2} h_{n-1}(0)$$
Une récurrence permet alors de montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ h_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n!} \quad \text{et} \quad h_{2n+1}(0) = 0$$
On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{2n}(0) = \frac{(-1)^n \sqrt{(2n)!}}{\pi^{1/4} 2^n n!} \quad \text{et} \quad \phi_{2n+1}(0) = 0$$
Par ailleurs,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_k'(x) = \frac{1}{\sqrt{d_k}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-x h_k(x) + h_k'(x)\right)$$
La question 6 donne $h_n'(0)$ en fonction de $h_n(0)$. En faisant $x = 0$ dans l'égalité qui précède, on a alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{2n}'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_{2n+1}'(0) = \frac{(-1)^n \sqrt{(2n+1)!}\sqrt{2}}{\pi^{1/4} n! 2^n}$$
8. La formule (4) donne $t h_k(t)$ en fonction de $h_{k-1}(t)$ et de $h_{k+1}(t)$. Elle permet d'obtenir
$$(x-y) h_k(x) h_k(y) = h_{k+1}(x) h_k(y) - h_{k+1}(y) h_k(x) + \frac{k}{2} \left(h_{k-1}(x) h_k(y) - h_{k-1}(y) h_k(x)\right)$$
9. On prouve la première relation par récurrence sur n.
   - La relation est vraie pour $n = 1$ (elle se lit $(x-y)\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-y)$).
   - Supposons la relation vérifiée jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors (avec la relation au rang n)
$$(x-y) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k} h_k(x) h_k(y) = \frac{1}{d_{n-1}} \left(h_n(x) h_{n-1}(y) - h_n(y) h_{n-1}(x)\right) + \frac{(x-y)}{d_n} h_n(x) h_n(y)$$

   On utilise la formule de la question 8 pour exprimer le dernier terme. Compte-tenu de la relation $d_n = \frac{n d_{n-1}}{2}$, on obtient la formule au rang $n+1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x)\phi_k(y) &= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k(x)h_k(y)}{d_k} \\
&= e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{1}{(x-y)d_{n-1}} (h_n(x)h_{n-1}(y) - h_n(y)h_{n-1}(x)) \\
&= \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-1}}} \frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_{n-1}(x)\phi_n(y)}{x-y}
\end{aligned}$$

Avec $d_n = \frac{nd_{n-1}}{2}$ on obtient la seconde partie de la formule (6).

2 Etude de ϕ_{2m}.

10. $(S(r,\beta,\gamma))$ est un problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre 2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (coefficients continus et coefficient devant ρ'' qui ne s'annule pas) et on a donc une unique solution.
    γ étant non nul, $u_1 : x \mapsto \cos(\gamma x)$ et $u_2 : x \mapsto \sin(\gamma x)$ forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène. D'après la méthode de variation des constantes, pour que $c_1u_1 + c_2u_2$ soit solution de l'équation complète, il suffit que

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

   c'est à dire que

$$c_1'(x) = -\frac{1}{\gamma} r(x)\sin(\gamma x) \quad \text{et} \quad c_2'(x) = \frac{1}{\gamma} r(x)\cos(\gamma x)$$

   D'après le théorème fondamentale, il suffit donc de choisir

$$c_1(x) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^x r(t)\sin(\gamma t)\,dt \quad \text{et} \quad c_2(x) = \frac{1}{\gamma}\int_0^x r(t)\cos(\gamma t)\,dt$$

   Finalement, il existe des constantes a et b telles que la solution ρ de $(S(r,\alpha,\beta)$ vérifie

$$\rho(x) = a\cos(\gamma x) + b\sin(\gamma x) + \frac{1}{\gamma}\int_0^x r(t)\sin(\gamma(x-t))\,dt$$

   On a $\rho(0) = a$ et $\rho'(0) = \gamma b + c_1'(0) + \gamma c_2(0) = \gamma b$ ce qui donne a et b compte-tenu des données initiales :

$$\rho(x) = \beta\cos(\gamma x) + \frac{1}{\gamma}\int_0^x r(t)\sin(\gamma(x-t))\,dt$$

11. Soit $r : x \mapsto x^2\phi_{2m}(y)$. ϕ_{2m} est alors solution de $S(r, \phi_{2m}(0), \sqrt{4m+1})$. On a donc

$$\phi_{2m}(x) = \phi_{2m}(0)\cos(\sqrt{4m+1}x) + \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\int_0^x t^2\phi_{2m}(t)\sin(\sqrt{4m+1}(x-t))\,dt$$

   Avec l'expression de $\phi_{2m}(0)$ obtenue en question 7, on obtient la formule demandée.
12. La formule Stirling donne, après simplifications

$$\alpha_m \sim \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}m^{1/4}}$$

13. Si f et g sont des applications continues sur $[0,x]$ alors

$$\left|\int_{[0,x]} fg\right| \leq \sqrt{\int_{[0,x]} f^2}\sqrt{\int_{[0,x]} g^2}$$

En appliquant ceci avec ϕ_{2m} et $g\ :\ y \mapsto \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}} y^2$ on obtient

$$\left|\int_{[0,x]} \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\ dy\right| \leq \sqrt{\int_{[0,x]} g^2}\sqrt{\int_{[0,x]} \phi_{2m}^2}$$

On majore le membre de droite en remarquant que

$$\int_{[0,x]} \phi_{2m}^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{2m}^2 = 1$$

et que

$$\int_{[0,x]} g^2 \leq \frac{1}{4m+1}\int_{[0,x]} y^4\ dy = \frac{|x|^5}{(4m+1)5}$$

On obtient alors

$$\left|\int_{[0,x]} \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\ dy\right| \leq \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\frac{|x|^{5/2}}{\sqrt{5}}$$

ce qui est la relation demandée ($\int_{[0,x]} h = \pm\int_0^x h$).

14. Les questions 11 et 13 donnent

$$\phi_{2m}(\frac{x}{2\sqrt{m}}) = \alpha_{2m}\cos(\sqrt{\frac{4m+1}{4}}x) + h_m(x) \quad \text{avec} \quad |h_m(x)| \leq \frac{|x|^{5/2}}{\sqrt{4m+1}\sqrt{5}(2\sqrt{m})^{5/2}}$$

$m^{1/4}h_m(x)$ est de limite nulle quand $m \to +\infty$. De plus $(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\alpha_m$ tend vers 1 quand $m \to +\infty$ (question 12) et ainsi

$$\lim_{m\to+\infty}(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\phi_{2m}(\frac{x}{2\sqrt{m}}) = \cos(x)$$

3 Intégrales de déterminants.

15. On a

$$K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y) = \sum_{0\leq i,j\leq N-1} \phi_i(x)\phi_i(z)\phi_j(z)\phi_j(y)$$

Si on intègre cette relation sur $\mathbb{R}$ (la variable d'intégration étant z) on obtient, compte-tenu des relations (5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)\ dz = \sum_{0\leq i,j\leq N-1} \phi_i(x)\phi_j(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(z)\phi_j(z)\ dz = K^{(N)}(x,y)$$

Toujours avec les relations (5), on a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,x)\ dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(x)^2\ dx = N$$

16. $\hat{\sigma}$ est un élément de S_k comme composée de tels éléments. De plus

$$\hat{\sigma}(k) = (k, \sigma(k))(\sigma(k)) = k$$

La signature étant un morphisme et la signature d'une transposition valant -1, on a

$$\varepsilon(\hat{\sigma}) = \begin{cases} \varepsilon(\sigma) & \text{si } \ \sigma(k) = k \\ -\varepsilon(\sigma) & \text{sinon} \end{cases}$$

17. Soit $\tau \in \theta^{-1}\left(\{\theta(\sigma)\}\right)$; on a $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}$ et donc aussi $\hat{\tau} = \hat{\sigma}$ (les restrictions à $\{1, \ldots, k-1\}$ sont les mêmes et les fonctions prennent la même valeur en k). En notant $j = \tau(k)$, on a donc $(k, j) \circ \tau = (k, \sigma(k)) \circ \sigma$. Comme (k, j) est sa propre inverse, on a donc $\tau = (k, j) \circ (k, \sigma(k)) \circ \sigma$. Notons τ_j cette permutation. On vient de voir que seules les k permutations τ_j peuvent être élément de $\theta^{-1}\left(\{\theta(\sigma)\}\right)$.
Réciproquement, soit $j \in \{1, \ldots, k\}$. On a $\tau_j(k) = j$ et donc $\hat{\tau_j} = (k, j) \circ \tau_j = (k, \sigma_k) \circ \sigma = \hat{\sigma}$. A fortiori, on a $\tilde{\tau_j} = \tilde{\sigma}$ et $\tau_j \in \theta^{-1}\left(\{\theta(\sigma)\}\right)$.
Enfin, comme σ et $(k, \sigma(k))$ sont des applications bijectives, si $\tau_i = \tau_j$ alors $i = j$ (en composant à droite par σ^{-1} puis $(1, \sigma(k))$ on obtient $(k, i) = (k, j)$).
$\theta(\sigma)$ a donc exactement k antécédents par θ.

18. On veut intégrer $\prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})$ sur $\mathbb{R}$ la variable étant x_k. Il convient donc de repérer où l'on trouve x_k ce qui nous amène à distinguer deux cas.
- Si $\sigma(k) = k$ alors x_k apparaît seulement pour le terme $i = k$ et on écrit que

$$\prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\right) \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x_k)\phi_j(x_k)$$

Comme $\hat{\sigma} = \tilde{\sigma}$, on a $\sigma(i) = \tilde{\sigma}(i)$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ et donc

$$\prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})\right) \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x_k)\phi_j(x_k)$$

Compte-tenu des relations 5, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\, dx_k &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})\right) \sum_{j=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j(x_k)\phi_j(x_k)\, dx_k \\ &= N\left(\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})\right) \end{aligned}$$

- Si $\sigma(k) \neq k$, alors $u = \sigma^{-1}(k) \neq k$. x_k apparaît dans le terme pour $i = k$ et dans celui pour $i = u$. On écrit donc

$$\prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) = \left(\prod_{i \notin \{u,k\}} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\right) \sum_{0 \leq \ell, j \leq N-1} \phi_\ell(x_u)\phi_\ell(x_k)\phi_j(x_k)\phi_j(x_{\sigma(k)})$$

En intégrant, on a alors (avec les relations (5))

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\, dx_k \\
= &\left(\prod_{i \notin \{u,k\}} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) \right) \sum_{0 \leq \ell, j \leq N-1} \phi_\ell(x_u)\phi_j(x_{\sigma(k)}) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\ell(x_k)\phi_j(x_k)\, dx_k \\
= &\left(\prod_{i \notin \{u,k\}} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) \right) \sum_{0 \leq j \leq N-1} \phi_j(x_u)\phi_j(x_{\sigma(k)}) \\
= &\left(\prod_{i \notin \{u,k\}} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) \right) K^{(N)}(x_u, x_{\sigma(k)})
\end{aligned}$$

Comme $\hat{\sigma}(u) = (k, \sigma(k))(\sigma(u)) = (k, \sigma(k))(\sigma(k)) = k$ et comme

$$\forall i \notin \{u, k\},\ \hat{\sigma(i)} = (k, \sigma(k))(\sigma(i)) = \sigma(i)$$

car alors $\sigma(i) \notin \{\sigma(u), \sigma(k)\} = \{k, \sigma(k)\}$, on a finalement montré que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\, dx_k = \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})$$

19. On utilise l'expression théorique du déterminant et la linéarité du passage à la limite pour obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det} K^{(N)}(x_1, \dots, x_k)\, dx_k = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\, dx_k$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det} K^{(N)}(x_1, \dots, x_k)\, dx_k = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\alpha(\sigma) \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})$$

où $\alpha(\sigma)$ vaut N si $\sigma(k) = k$ et 1 sinon.
D'après la question 17, un élément de S_{k-1} qui admet un antécédent par θ en admet exactement k. Comme $\mathrm{Card}(S_k) = k\mathrm{Card}(S_{k-1})$, on en déduit que tout élément de S_{k-1} admet exactement k antécédent dans S_k par θ. Ceci signifie que l'on peut regrouper les éléments de S_k en k paquets (deux à deux disjoints) de $(k-1)!$ éléments et que θ réalise une bijection de chaque paquet dans S_{k-1}. On peut former l'un de ces paquets en regroupant les permutations laissant k invariant. Si on note $P_1, \dots, P_k$ ces paquets (partition de S_k) avec P_1 le paquet contenant les σ telles que $\sigma(k) = k$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det} K^{(N)}(x_1, \dots, x_k)\, dx_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\sigma \in P_j} \varepsilon(\sigma)\alpha(\sigma) \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})$$

Par choix des paquets, on a $\alpha(\sigma) = N$ et $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = \varepsilon(\sigma)$ pour $\sigma \in P_1$ (question 16) et $\alpha(\sigma) = 1$ et $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = -\varepsilon(\sigma)$ pour σ dans l'un des autres paquets. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det} K^{(N)}(x_1, \dots, x_k)\, dx_k = N \sum_{\sigma \in P_1} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)}) - \sum_{j=2}^{k} \sum_{\sigma \in P_j} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)})$$

Enfin, $\tilde{\sigma}$ décrit S_{k-1} quand σ décrit un paquet P_j et on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_k)\,dx_k = (N-k+1)\mathrm{Det}K^{N}(x_1,\dots,x_{k-1})$$

Ceci est bien sûr valable pour $k \geq 2$. Le résultat reste vrai pour $k=1$ (avec la convention de l'énoncé, l'égalité s'écrit $N=N$).

4 Déterminants et intégrales.

20. Les h_k sont échelonnés en degré du degré 0 au degré $N-1$. On peut donc ajouter une combinaison linéaire des $h_0,\dots,h_{k-1}$ à h_k pour obtenir un monôme de degré k et même précisément X^k puisque h_k est unitaire. On en déduit qu'il est possible de faire des opérations élémentaires sur les colonnes du premier déterminant pour obtenir le second. Ces opérations laissant le déterminant invariant, on a la première égalité voulue.
Notons

$$V_n(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

En faisant un développement par rapport à la dernière colonne, on voit que

$$P(X) = V_n(a_1,\dots,a_{n-1},X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

et que $V_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})$ est le coefficient de X^{n-1} dans $P(X)$. Par ailleurs, $a_1,\dots,a_{n-1}$ sont des racines de P ; si on les suppose deux à deux distinctes, on a donc

$$P(X) = V_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)$$

ce qui nous donne la relation de récurrence

$$V_n(a_1,\dots,a_n) = V_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)$$

qui est encore valable si les a_i ne sont pas deux à deux distincts (on a nullité des deux membres). On en déduit alors par récurrence que

$$V_n(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

On en déduit la seconde égalité demandée.

21. Le terme général dans $\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_N)$ est

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{d_k}e^{\frac{-x_i^2-x_j^2}{2}}h_k(x_i)h_k(x_j)$$

On peut factoriser tous les terme de la ligne i par $e^{-x_i^2/2}$ puis tous les termes de la colonne j par $e^{-x_j^2/2}$. Par multilinérité du déterminant, $\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_N) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\Delta_n$ où le terme générique de Δ_n est

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{d_k}h_k(x_i)h_k(x_j)$$

Δ_n s'interprète alors comme le carré de $\det \begin{pmatrix} \frac{h_0(x_1)}{\sqrt{d_0}} & \frac{h_1(x_1)}{\sqrt{d_1}} & \dots & \frac{h_{N-1}(x_1)}{\sqrt{d_{N-1}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{h_0(x_N)}{\sqrt{d_0}} & \frac{h_1(x_N)}{\sqrt{d_1}} & \dots & \frac{h_{N-1}(x_N)}{\sqrt{d_{N-1}}} \end{pmatrix}$. Dans ce déterminant, on peut factoriser chaque colonne par un $1/\sqrt{d_j}$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathrm{Det} K^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \det \begin{pmatrix} h_0(x_1) & h_1(x_1) & \dots & h_{N-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_0(x_N) & h_1(x_N) & \dots & h_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \Psi_N^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

On prouve alors la formule générale par une récurrence descendante grâce à la mirifique formule de la question 19. Les détails sont laissés au sagace (et courageux) lecteur !