Épreuve annulée par suite d'une erreur
de l'imprimeur (partie II non tirée)

CONCOURS D'ADMISSION 1986

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION M

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II – M

Dans ce problème, on propose de généraliser la notion de convergence usuelle d'une série de nombres réels. Étant donnée une suite :

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

de réels, on lui associe la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles ($A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$) et les deux séries entières de sommes respectives $a(x)$ et $A(x)$ définies par :

$$a(x) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} ,$$

$$A(x) = \sum_0^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!} .$$

On dira que la suite a est B-sommable si $A(x)$ existe pour tout x réel et si $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} A(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on définit la B-somme de la suite a en posant :

$$S_B(a) = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} A(x)]$$

On dira que la suite a est C-sommable si $a(x)$ existe pour tout x réel et si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x)\,dx$ est convergente. Dans ce cas, on définit la C-somme de la suite a en posant :

$$S_C(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} a(x)\,dx.$$

Lorsque la série $\sum\limits_0^{+\infty} a_n$ converge au sens usuel, on pourra poser :

$$S(a) = \sum_0^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} A_n .$$

La partie I est consacrée à l'étude d'exemples ; les parties I et II étudient le cas général.

PARTIE I

1° – On se donne la suite a définie par son terme général :

$$a_n = (-1)^n .$$

Étudier l'existence et la valeur de $S_B(a)$ ainsi que l'existence et la valeur de $S_C(a)$.

2° – Soit α un réel donné non nul, on considère la suite a de terme général :

$$a_n = \alpha^n .$$

a) Étudier, suivant les valeurs de α, l'existence de $S_C(a)$, que l'on calculera lorsqu'elle existe.

b) Calculer A_n et déterminer, suivant les valeurs de α, l'existence de $S_B(a)$, que l'on calculera lorsqu'elle existe.

3° – α étant toujours un réel non nul, on considère la suite a de terme général :

$$a_n = (n+1)\alpha^n .$$

a) Calculer $\sum\limits_0^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a(x)$ et en déduire les valeurs de α pour lesquelles $S_C(a)$ existe. Calculer dans ce cas $S_C(a)$.

b) Calculer A_n, puis $A(x) = \sum\limits_0^{+\infty} \frac{A_n x^n}{n!}$. En déduire les valeurs de α pour lesquelles $S_B(a)$ existe. Calculer dans ce cas $S_B(a)$.

4° – Étudier l'existence de la C-somme de la suite a de terme général :

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n+1} ,$$

en supposant toujours $\alpha \neq 0$. On ne cherchera pas à calculer $S_C(a)$.

5° – Résoudre la même question lorsque :

$$a_n = \frac{\alpha^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\alpha \neq 0).$$

6° – a) Soient deux suites a et b de termes généraux a_n et b_n. On suppose $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout n, et, de plus, on suppose qu'il existe un entier positif ou nul N tel que :

$$n \geq N \implies a_n \leq b_n.$$

Montrer que l'existence de $S_C(b)$ entraîne l'existence de $S_C(a)$.

Que peut-on en déduire si on a l'équivalence :

$$a_n \sim b_n \text{ lorsque } n \to +\infty \ ?$$

b) Soit r un réel vérifiant :

$$r \in \,]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

Étudier l'existence de $S_C(a)$ lorsque a est la suite de terme général :

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^r}$$

PARTIE II

On se propose de montrer que si la série $\sum\limits_0^{+\infty} a_n$ est convergente au sens usuel, alors la suite a de terme général a_n est B-sommable ainsi que C-sommable.

1° – On suppose que la série $\sum\limits_0^{+\infty} a_n$ converge et on note $A = \sum\limits_0^{+\infty} a_n$.

a) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$. Prouver que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \sum_0^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}\right) = 0.$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b) En déduire, sous l'hypothèse faite concernant a, l'existence de la B-somme de la suite a, et la valeur de celle-ci.

2° - Dans cette question, la série $\sum_0^{+\infty} a_n$ est supposée <u>absolument convergente</u> : on pose toujours $\sum_0^{+\infty} a_n = A$.

a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^n\, dx$.

b) Montrer que : $\forall X > 0 \ , \ \int_0^X e^{-x}\, a(x)\, dx = \sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^X e^{-x}\, x^n\, dx$.

c) Montrer que : $\lim_{X \to +\infty} \sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_X^{+\infty} e^{-x}\, x^n\, dx = 0$,

et déduire de ce qui précède l'existence de la C-somme de la suite a et sa valeur.

3° - On suppose maintenant que $\sum_0^{+\infty} a_n$ est convergente, mais non nécessairement absolument convergente, en posant toujours $\sum_0^{+\infty} a_n = A$. On pose par ailleurs :

$$u_n(X) = \frac{1}{n!} \int_0^X e^{-x}\, x^n\, dx, \qquad v_n(X) = u_n(X) - u_{n+1}(X).$$

a) Montrer que : $\forall X > 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} u_n(X) = 0$,

et en déduire que : $\forall X > 0 \ , \ \sum_0^{+\infty} a_n\, u_n(X) = \sum_0^{+\infty} A_n\, v_n(X)$.

b) Montrer que : $\forall X > 0 \ , \ v_n(X) > 0$.

c) Démontrer que :

α) $\forall X > 0 \ , \ \sum_0^{+\infty} v_n(X)$ converge ;

β) $\forall X > 0 \ , \ \sum_0^{+\infty} v_n(X) < 1$;

γ) $\lim_{X \to +\infty} \sum_0^{+\infty} v_n(X) = 1$.

d) Déduire de ce qui précède l'existence de la C-somme de la suite a. Quelle est sa valeur ?

4° - Est-ce que, réciproquement, l'existence de $S_B(a)$ (resp. $S_C(a)$) implique nécessairement la convergence de $\sum_0^{+\infty} a_n$?

5° - a) Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[e^{-x} \sum_1^{+\infty} \left[\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\, \frac{\alpha^n}{n} \right] \left(\frac{x^n}{n!}\right) \right],$$

où α est un réel donné tel que $|\alpha| < 1$.

b) Déterminer lorsque β est un réel quelconque :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sum_0^{+\infty} \frac{(\beta x)^n}{(n!)^2}\, dx.$$

<u>PARTIE III</u>

Dans cette partie, on se propose de comparer les deux notions de B-somme et de C-somme d'une même suite a. On conserve toujours les notations :

$$a(x) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad A(x) = \sum_0^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

On suppose désormais que a(x) et A(x) existent pour tout x réel.

1° - a) Déterminer, lorsque X > 0, la différence :

$$\int_0^X e^{-t}\, a'(t)\, dt - \int_0^X e^{-t}\, a(t)\, dt$$

b) Calculer $\int_0^X e^{-t} \left[(A'(t) - A(t) \right] dt$ et montrer que cette intégrale s'exprime simplement à l'aide de $\int_0^X e^{-t}\, a'(t)\, dt$.

c) Déduire de ce qui précède une relation entre $e^{-X} A(X)$ et $\int_0^X e^{-t}\, a(t)\, dt$.

d) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $e^{-X} a(X)$ pour que les existences de la B-somme et de la C-somme de a soient des propriétés équivalentes.

2° - a) f étant une fonction continue sur ℝ, trouver, à l'aide d'une intégrale fonction de sa borne supérieure, la solution générale de l'équation différentielle y' + y = f. En déduire que si ϕ est une fonction dérivable sur ℝ, à dérivée continue, telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\phi(x) + \phi'(x) \right] = A, \text{ alors } \lim_{x \to +\infty} \phi'(x) = 0.$$

b) Déduire de cette propriété et de la relation trouvée précédemment en III-1°-c) que si la suite a admet une B-somme, alors elle admet une C-somme, et que ces deux sommes sont égales.

c) Soit la suite a de terme général a_n défini par :

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, (2p+2)^n}{(2p+1)!}$$

Calculer a(x) en admettant qu'on peut intervertir les deux signes de sommation. Montrer ensuite l'existence de la C-somme de a et en déduire que la réciproque de la propriété démontrée en III-2°-b) est fausse.