

E3A 2013 - MP - Maths B

Corrigé

Exercice n°1

- 1) a) C'est immédiat.
 b) Il est clair que $\ker \varphi$ ne contient que la colonne nulle, donc φ est injective ; elle réalise donc une bijection de $\ker A$ dans $\varphi(\ker A)$.

D'autre part, soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$, avec X et Y dans $\mathbb{C}^n$. Alors :

$$Z \in \ker M_A \iff \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \iff Y = 0 \text{ et } AX = 0 \iff X \in \ker A \text{ et } Z = \varphi(X)$$

et donc $\ker M_A = \varphi(\ker A)$, ce qui achève la démonstration.

- c) Si $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la formule du rang, appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à B , donne $\dim \ker B + \operatorname{rg} B = p$.

Les deux questions précédentes montrent que les sous-espaces $\ker A$ et $\ker M_A$ sont isomorphes, donc ont même dimension.

Compte tenu des dimensions de ces matrices, on en déduit $n - \operatorname{rg} A = 2n - \operatorname{rg} M_A$, soit $\operatorname{rg} M_A = n + \operatorname{rg} A$.

- 2) a) On obtient immédiatement $M_A^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

- b) On choisit, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. On vérifie immédiatement que $Q \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$,

donc que Q est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$; et que $QEQ^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = M_A^2$. Puisque E est diagonale, M_A^2 est bien diagonalisable.

- c) On vérifie immédiatement que l'inverse de M_A^2 est $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

- d) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M_A^2 . Puisque M_A^2 est diagonalisable, le polynôme $\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ annule M_A^2 , et donc $R = \prod_{k=1}^p (X^2 - \lambda_k)$ annule M_A .

Puisque M_A^2 est inversible, ses valeurs propres sont non nulles, et donc chaque λ_k a deux racines carrées distinctes μ_k et $-\mu_k$; de plus, les λ_k étant distincts, les $2p$ nombres $\mu_1, -\mu_1, \dots, \mu_p, -\mu_p$ sont deux à deux distincts.

On a alors $R = \prod_{k=1}^p (X - \mu_k)(X + \mu_k)$, ce qui montre que R est scindé à racines simples. Puisque M_A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, on sait alors que M_A est diagonalisable.

- 3) a) Soit $(X_1, \dots, X_{2n})$ une base de $\mathbb{C}^{2n}$ constituée de colonnes propres pour M_A , associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$. Pour simplifier les écritures, on suppose qu'il existe p tel que $\lambda_k \neq 0$ si $k \leq p$, et $\lambda_k = 0$ pour $k > p$.

L'espace $\text{Im } M_A$ est alors engendré par les colonnes $(AX_1, \dots, AX_{2n}) = (\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_{2n} X_{2n})$. Il est clair qu'on peut supprimer dans cette famille les vecteurs nuls, et diviser chacun des vecteurs restants par le λ_k associé, sans modifier le sous-espace engendré. On a donc

$$\boxed{\text{Im } M_A = \text{Vect}(X_1, \dots, X_p)}.$$

Les vecteurs X_k forment aussi une base de vecteurs propres pour M_A^2 , associés aux valeurs propres λ_k^2 . Le même raisonnement montre que l'image de M_A^2 est engendrée par ceux de ces vecteurs qui sont associés à une valeur propre non nulle ; on en déduit

$$\boxed{\text{Im } M_A^2 = \text{Vect}(X_1, \dots, X_p) = \text{Im } M_A}.$$

- b) La question précédente montre, grâce à la formule du rang, que $\ker M_A$ et $\ker M_A^2$ ont même dimension.

De plus, si $X \in \ker M_A$, alors $M_A^2 X = M_A(M_A X) = 0$, donc $\ker M_A \subset \ker M_A^2$.

On en déduit que $\boxed{\ker M_A = \ker M_A^2}$.

- c) Soit $X \in \ker A$. Un calcul immédiat montre que $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ est dans $\ker M_A^2$, donc dans $\ker M_A$ d'après la question précédente.

Mais on a vu en 1 que les éléments de $\ker M_A$ sont de la forme $\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $X = 0$. Par suite,

$\ker A = \{0\}$, ce qui suffit à prouver que $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

- d) Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ canoniquement associé à M_A^2 . Puisque M_A est diagonalisable, M_A^2 l'est aussi, et donc aussi u .

D'autre part, la forme de la matrice M_A^2 montre que le sous-espace F de $\mathbb{C}^{2n}$ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique est stable par u ; puisque u est diagonalisable, on sait qu'alors l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F l'est aussi.

Mais la matrice de $\tilde{u}$ est A , et donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

- 4) On a démontré : $\boxed{M_A \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ est diagonalisable et inversible}}$.

Exercice n°2

- 1) a) Notons R ce rayon de convergence. Pour $x \in [-1, 1]$, le terme général de la série tend vers 0, donc $R \geq 1$; mais ce terme diverge si $|x| > 1$, donc $R \leq 1$. Finalement, $\boxed{R = 1}$.
- b) On sait déjà que I contient l'ouvert $] -1, 1[$, et que la série diverge pour $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$, le terme général de la série vaut $1/(2n+1)$, donc la série diverge ; par suite $\boxed{I =] -1, 1[}$.

- 2) a) Pour tout $x \in I$, $xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; cette fonction est donc la somme d'une série entière convergente sur I , le rayon de convergence de cette série vaut donc au moins 1. On sait qu'alors la somme est dérivable sur I , et que la fonction dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On a donc sur I : $\boxed{\frac{d}{dx}(xS(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}}$ (série géométrique de raison x^2).

- b) On trouve facilement que $\boxed{a = b = 1/2 \text{ convient}}$.

Puisque $xS(x)$ est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0, on a effectivement

$$\forall x \in I \quad xS(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

- 3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction $x \mapsto x^{2n}/(2n+1)$. On applique le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.
- Pour tout n , la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $J =]0, 1[$.
 - La série $\sum f_n$ converge simplement sur J , et sa somme S y est continue par morceaux d'après 2-b).
 - Pour tout n , $\int_J |f_n| = 1/(2n+1)^2$, et la série de terme général $1/(2n+1)^2$ converge.

On peut alors conclure que S est intégrable sur J , et que

$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

b) C'est une paraphrase du a).

- 4) Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (\ln t)/(1-t^2)$. La fonction g est continue sur $]0, 1[$. En 0, $g(t) \sim \ln t = o(1/\sqrt{t})$, donc g est intégrable sur $]0, 1/2]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. En 1, $\ln t \sim t-1$, donc g a pour limite $-1/2$, et donc est prolongeable par continuité; elle est donc intégrable sur $[1/2, 1[$. Par suite, g est intégrable sur $]0, 1[$.

5) On a $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [(\arctan x)^2]_0^1$ soit $J = \frac{\pi^2}{32}$.

- 6) La fonction à intégrer est définie et continue sur $[0, \pi/4[$. On a d'autre part, pour tout $\theta \in [0, \pi/4[$, $\frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} = \frac{\ln(1+\cos 2\theta)}{2\cos 2\theta}$, de la forme $\frac{\ln(1+u)}{2u}$, où $u = \cos 2\theta$ a pour limite 0 en $\pi/4$. La fonction étudiée a donc pour limite $1/2$ en $\pi/4$, donc y est prolongeable par continuité; elle est donc finalement intégrable sur $[0, \pi/4[$.

7) a) On a $K + L = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin^2 2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin 2\theta)}{1-\sin^2 2\theta} (2\cos 2\theta d\theta)$. Le changement de variable $t = \sin 2\theta$ donne donc immédiatement $K + L = \frac{I}{2}$.

b) On a $K - L = - \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan^2 \theta)}{2\cos 2\theta} d\theta = - \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan \theta)}{1-\tan^2 \theta} (1+\tan^2 \theta) d\theta$. Le changement de variable $t = \tan \theta$ donne donc immédiatement $K - L = -I$.

c) En additionnant les deux résultats précédents, on obtient $I = -4K = -4J$ soit $I = -\frac{\pi^2}{8}$.

- 8) Soient a et b tels que $0 < a \leq b < 1$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \left[\frac{\ln x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right]_a^b - \int_a^b \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

En 0, $\ln x \ln(1+x) \sim x \ln x$ qui tend vers 0, et de même $\ln x \ln(1-x)$ a pour limite 0 en 0. L'expression entre crochets a donc pour limite 0 en 0.

De même, en posant éventuellement $u = 1-x$, on voit que $\ln x \ln(1-x)$ a pour limite 0 en 1, et que donc l'expression entre crochets a pour limite 0 en 1.

En faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient donc $\int_0^1 \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

Compte tenu de 3)b) et 7)c), on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice n°3

1) Les asymptotes ont pour équations $bx = ay$ et $bx = -ay$, donc ont pour vecteurs directeurs respectifs (a, b) et $(a, -b)$. Les asymptotes sont donc orthogonales si et seulement si $a^2 - b^2 = 0$, soit $a = b$ puisque a et b sont positifs.

2) Avec $b = 0$, l'équation devient $x^2 - y^2 = a^2$, soit $(x - y)(x + y) = a^2$. Posons $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$. On a alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P est orthogonale (matrice de rotation d'angle $\pi/4$), donc P^{-1} , elle aussi orthogonale, est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ à une autre base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$.

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans $(O, \mathcal{B})$, les formules de passage montrent que (X, Y) sont les coordonnées du même point dans le repère $(O, \mathcal{B}')$. L'équation de l'hyperbole dans ce dernier repère est donc $XY = a^2/2$.

3) a) L'équation traduit la condition $\Omega M^2 = R^2$, soit $(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2$, ou, en développant, $X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2$.

b) Soit $M(X, Y)$ un point de l'hyperbole. Puisque $XY = k \neq 0$, on a forcément $X \neq 0$, et donc $Y = k/X$. En remplaçant dans l'équation du a), on voit après calculs que M est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $X^4 - 2\alpha X^3 + (\beta^2 + \alpha^2 - R^2)X^2 - 2\beta kX + k^2 = 0$.
Les abscisses X_A, X_B, X_C et X_D vérifient donc cette relation.

c) Les quatre points étant distincts et sur l'hyperbole, leurs abscisses sont forcément distinctes; ce sont donc les quatre racines du polynôme trouvé en b). Les relations entre coefficients et racines montrent alors que $X_A X_B X_C X_D = k^2 = a^4/4$.

4) Supposons réciproquement la relation $X_A X_B X_C X_D = k^2$ vérifiée. On peut alors développer le polynôme $(X - X_A)(X - X_B)(X - X_C)(X - X_D)$ sous la forme $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + k^2$.

Posons $\alpha = -p/2$ et $\beta = -r/(2k)$. Soit X l'abscisse de l'un des quatre points et Y son ordonnée. Puisque X est racine du polynôme précédent et $X = k/Y$, on a

$$X^2 - 2\alpha X + q - \frac{2k\beta}{X} + \frac{k^2}{X^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad X^2 - 2\alpha X + q - 2\beta Y + Y^2 = 0$$

soit finalement $(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - q$.

Cette relation étant vérifiée par les quatre points, on a donc forcément $\alpha^2 + \beta^2 - q > 0$ (strictement car les points sont distincts); c'est donc l'équation d'un cercle, de centre (α, β) et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - q}$.

Les quatre points appartiennent donc bien à un même cercle.