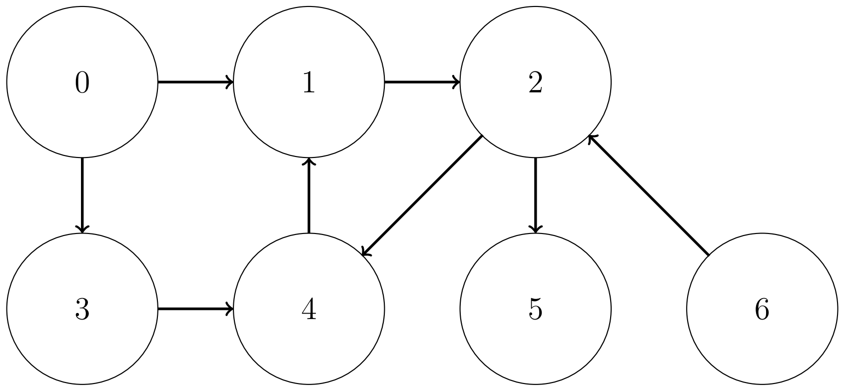
EXERCICE 1

Hormis Q3 et Q4, les questions de cet exercice sont indépendantes. Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence. Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire : $d = \{0 : [1, 3], 1 : [2], 2 : [4, 5], 3 : [4], 4 : [1], 5 : [], 6 : [2]\}$

1. Écrire en langage Python une fonction `degreMax ( d : dict ) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

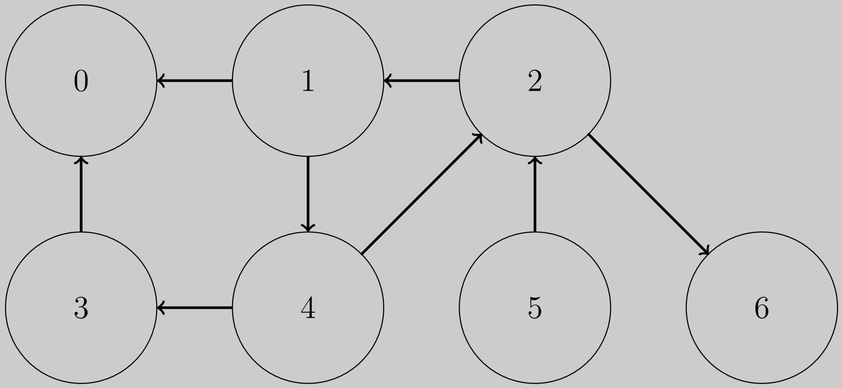
Solution:

```
def degreMax(d):
        n=len(d)
        m=0
        for i in range(n):
                if len(d[i])>m:
                        m=len(d[i])
        return m
```

Si G est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de G le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de G .

2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction. Écrire en langage Python une fonction `grapheInv( d : dict ) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par d.

Solution:




```
def graphInv(d):
        res={}
        n=len(d)
        for i in range(n):
                L=[]
                for j in range(n):
                        if i in d[j]:
                                L.append(j)
                res[i]=L
        return res
```

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste L telle que $L[s]$ est égale à la couleur attribuée au sommet s.

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

3. Écrire en langage Python une fonction `colorationValide( d :  dict, L : list ) -> b bool` qui renvoie True si la coloration L du graphe représenté par d est valide et False dans le cas contraire.

Solution:

```
def colorationValide(d,L):
        n=len(d)
        for i in range(n):
                for j in d[i]:
                        if L[i]==L[j]:
                                return False
        return True
```

4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

Solution: Le pire des cas se produit par exemple lorsque le graphe est bien colorié et qu'il faut donc tout tester. On passe alors N fois dans la première boucle et pour chaque passage dans cette boucle, on passe au plus M fois dans la seconde boucle. Au total, on a donc au maximum NM tests d'égalité.

On considère deux tables: FILMS et LOCATIONS. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut: date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

Solution: SELECT max(duree) FROM LOCATIONS;

6. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

Solution:
SELECT FILMS.codefilm,nomfilm,AVG(duree) **AS** D
FROM FILMS
JOIN LOCATIONS **ON** LOCATIONS.codefilm=FILMS.codefilm
GROUP BY LOCATIONS.codefilm
HAVING D<2
ORDER BY D **DESC**;

EXERCICE 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1, P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Solution:

P_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}.

Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}".

On a bien $\mathcal{P}(1)$ puisque $P_1 = X$ et $\mathcal{P}(2)$ puisque $P_2 = 2X^2 - 1$.

Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$. D'après $\mathcal{P}(n)$, il existe $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n = 2^{n-1}X^n + R$. Ainsi, $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + 2XR - P_{n-1}$. D'après $\mathcal{P}(n-1)$, $\deg P_{n-1} = n-1$ donc $\deg(2XR - P_{n-1}) \leq \max(\deg(XR), \deg(P_{n-1})) \leq n$. On peut donc conclure que P_{n+1} est de degré $n+1$ et que son coefficient dominant est 2^n. On a bien démontré $\mathcal{P}(n+1)$.

8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Solution: On raisonne là encore par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}(n)$: " $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$".

Pour $n = 0$, on a bien pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0.\theta)$.

Pour $n = 1$, on a bien pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta.P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)$ donc $P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta.\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$. Mais, $2\cos\theta.\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ donc finalement, $P_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$.

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Solution: La fonction $t \in]-1,1[\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

De plus, au voisinage de 1, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ et ainsi, au voisinage de 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O(\frac{1}{\sqrt{1-t}})$. Or, par Riemann, $t \in [0,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable donc, par comparaison, $t \in [0,1[\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable.

De même en -1. Finalement, on a prouvé la convergence de l'intégrale.

10. Démontrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Solution: Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_k[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $t \in]-1, 1[$, $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$ donc $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$. Cela prouve la symétrie.

On a pour tout $t \in]-1, 1[$, $(\lambda P + Q)(t)R(t) = \lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t)$ donc $\int_{-1}^{1} \frac{(\lambda P+Q)(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et, par linéarité de l'intégrale, cela est donc $\lambda \int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Ainsi, $\langle \lambda P + Q, R\rangle = \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$. On a ainsi prouvé la linéarité à gauche. Par symétrie, on obtient donc la bilinéarité.

Puis, $\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et cela est positif par positivité de l'intégrale.

Enfin, si $\langle P, P\rangle = 0$, comme $t \in]-1, 1[\mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive, par le caractère défini de l'intégrale, on a pour tout $t \in]-1, 1[$, $P^2(t) = 0$. Ainsi, P a une infinité de racines et est donc nul.

On a bien montré que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$.

Solution: Par linéarisation, on a

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)d\theta$$

Or, pour $k = 0$, $\int_0^\pi \cos(k\theta)d\theta = \pi$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \cos(k\theta)d\theta = \frac{1}{k}(\sin(0) - \sin(k\pi)) = 0$.

Finalement, $\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ si $n \neq m$ et vaut $\frac{\pi}{2}$ si $m = n \neq 0$ et π si $m = n = 0$.

12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution: Vérifions que la famille $(P_0, ..., P_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$: soit $(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$. On a $\langle P_i, P_j\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. On pose $t = \cos\theta$ dans cette intégrale avec $\theta \in]0, \pi[$.

On obtient, $\langle P_i, P_j\rangle = \int_0^\pi P_i(\cos\theta)P_j(\cos\theta)d\theta$. Par la question 8, c'est aussi $\int_0^\pi \cos(i\theta)\cos(j\theta)d\theta$ et cela vaut 0 lorsque $i \neq j$.

Comme les P_i sont non nuls, la famille $\left(\frac{P_0}{||P_0||}, ..., \frac{P_k}{||P_k||}\right)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$ et comme elle est de cardinal k, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

Il nous reste donc à calculer les $||P_i||$. Or, pour i entier non nul, $||P_i||^2 = \int_0^\pi \cos^2(i\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, la famille $\left(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}P_1, ..., \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}P_k\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

PROBLÈME - Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

Partie I - Exemples

On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & {X_2}^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & {X_3}^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & {X_n}^2 \end{pmatrix}.$$

13. On pose $Y = \text{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

Solution: Notons $C = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. On a alors $M = \begin{pmatrix} X_1C & X_2C & \dots & X_nC \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\text{rg}(M) \in \{0,1\}$.

On en déduit que $\text{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli. Reste à trouver son paramètre.

Le rang de M est 0 ssi $M = 0$. En utilisant les coefficients diagonaux de M, on obtient : $M = 0$ ssi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i = 0$.

Ainsi, $P(Y=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)\right)$. Par indépendance mutuelle de X_1,...,X_n, on a $P(Y=0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = (1-p)^n$.

Finalement, $Y \sim \mathcal{B}(1-(1-p)^n)$.

14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.

Solution: On a $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i$. Comme les X_i sont iid de loi $\mathcal{B}(p)$, on a $\text{Tr}(M) \sim \mathcal{B}(n,p)$.

15. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement " M est une matrice de projection ".

Solution: On a $M^2 = UU^TUU^T$. Mais, $U^TU = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Comme les X_i valent 0 ou 1, on a aussi $U^TU = \sum_{i=1}^n X_i = \text{Tr}(M)$.

Finalement, $M^2 = \text{Tr}(M)UU^T = \text{Tr}(M)M$.

Notons A l'événement : " M est une matrice de projection".

On a $P(A) = P(M^2 = M) = P(\text{Tr}(M)M = M) = P(\text{Tr}(M) = 1 \text{ ou } M = 0)$.

Or, les événements "$\text{Tr}(M) = 1$" et "$M = 0$" sont incompatibles donc $P(\text{Tr}(M) = 1 \text{ ou } M = 0) = P(\text{Tr}(M) = 1) + P(M = 0)$.

D'après 13 et 14, cette probabilité vaut donc $\binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p + (1-p)^n$.

16. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement " M est une matrice de projection ".

Solution: Il s'agit toujours de calculer $P(M=0)$ et $P(\mathrm{Tr}(M)=1)$.

On a comme précédemment $P(M=0) = P(X_1=0)^n = e^{-n\lambda}$.

Puis, $P(\mathrm{Tr}(M)=1) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (X_1=0,...,X_{i-1}=0, X_i=1,...,X_n=0\right)$. Cette union est composée d'événements deux à deux incompatibles donc $P(\mathrm{Tr}(M)) = \sum_{i=1}^n P(X_1=0,...,X_{i-1}=0, X_i=1,...,X_n=0)$. Par indépendance mutuelle des X_i, toutes ces probabilités sont égales à $P(X_1=0)^{n-1}P(X_1=1)$ c'est-à-dire qu'on a $P(\mathrm{Tr}(M)=1) = ne^{-n\lambda}\lambda$.

17. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Solution: C'est une matrice de rang 1 et de trace n.

On obtient $J^2 = nJ$ donc $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J qui est simplement scindé puisque c'est $X(X-n)$.

Ainsi, J est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0, n\}$.

Comme J est de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$ qui est donc aussi la dimension de E_0. De plus, on voit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de E_0 : c'en est donc une base.

E_n est alors de dimension 1 et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n$, on conclut que $E_n = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Finalement, d'après les formules de changement de base, on a

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ -1 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Solution: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 donc le sous-espace associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.

On a $A^3 = 0$ donc A est nilpotente et non nulle: elle n'est donc pas diagonalisable d'après le cours.

Par ailleurs, sa trace est nulle.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1 .

19. On note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Solution: Comme A est de rang 1, si on note C_1,...,C_n ses vecteurs colonnes, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = a_i C$.

Soit $L = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$, on a alors $A = CL$.

20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Solution: Si on note c_1,...,c_n les coefficients de C, on a $LC = \sum_{i=1}^n a_i c_i$. Et on constate que c'est aussi la trace de A.

Ainsi, $A^2 = CLCL = C(LC)L = \mathrm{Tr}(A)CL = \mathrm{Tr}(A)A$.

21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Solution: Comme A est de rang 1, E_0 est de dimension $n-1$. D'après le cours, il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-1}(X-c)$. De plus, on sait que le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\mathrm{Tr}(A)$. Ainsi, $c = \mathrm{Tr}(A)$.

Finalement, $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

D'après la question 20, le polynôme $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de A. On a donc $\mu_A \in \{X^2 - \mathrm{Tr}(A)X, X, X - \mathrm{Tr}(A)\}$.

Comme A n'est pas la matrice nulle, $\mu_A \neq X$. Comme $A \neq \mathrm{Tr}(A)I_n$ (car sinon, on aurait $A = 0$ ou A de rang n selon que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ ou non), on a $\mu_A \neq X - \mathrm{Tr}(A)$. Finalement, $\mu_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X$.

22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) \neq 0.$$

Solution:

D'après le cours, A est diagonalisable ssi μ_A est simplement scindé.

Or, $\mu_A = X(X - \mathrm{Tr}(A))$. On a donc μ_A simplement scindé ssi $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Solution: On sait, par le théorème du rang, que $\dim \mathrm{Im}(u) = 1$. Ainsi, comme $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$, on a $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)) \geq 1$ et comme par ailleurs, $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$, on a donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker u = \mathrm{Im}(u)$ c'est-à-ire qu'on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker u$.

Soit $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = u(e_1)$. Comme $e_2 \in \mathrm{Im}(u)$, on a $e_2 \in \ker u$. On complète ensuite (e_2) en une base de $\ker u$: $(e_2, ..., e_n)$.

Vérifions que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$: comme elle est de cardinal n, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$. En appliquant u, on obtient $\lambda_1 u(e_1) = 0$. Mais $u(e_1) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.

Ainsi, on a $\lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$ et $(e_2, ..., e_n)$ est libre d'où la nullité de λ_2,...,λ_n.

Dans cette base, la représentation matricielle de u est celle demandée.

24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Solution: Par théorème du rang, $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker u = \mathbb{R}^n$.

On considère (e_1) une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $(e_2, ..., e_n)$ une base de $\ker u$.

Alors, $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (par concaténation de deux bases de deux sev de $\mathbb{R}^n$ supplémentaires). De plus, $u(e_1) \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_1) = ae_1$.

Dans cette base, on obtient la base demandée.

On a $a \neq 0$ car si a était nul, u serait l'application nulle ce qui n'est pas le cas.

25. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Solution: On sait déjà par le cours que deux matrices semblables ont le même trace.

Réciproquement, soit A et B deux matrices de rang 1 et de même trace. Si leur trace est nulle, elles sont toutes les deux semblables à la matrice de la question 23 et sont donc semblables. Si leur trace n'est pas nulle, elles sont toutes les deux semblables à une matrice de la question 24. Par ailleurs, le coefficient a sera bien le même puisqu'il est égal à la trace de la matrice. Ainsi, A et B sont semblables.