Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

$$A \begin{cases} x = 2a \sin t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = 2a \sin t \\ y = 2a \sin t \\ z = -2a \cos t \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = 0 \\ y = 2a \cos^2 t \\ z = 2a \sin t \cos t \end{cases}$$

a est donné, positif, non nul ; t désigne le temps.

1 - Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2 - On considère le solide S, lié au triangle ABC ; on demande de caractériser le champ des vitesses des points de S, à un instant t, en déterminant, <u>à partir des vecteurs vitesse</u> des points A, B et C :

a) le vecteur rotation instantanée ;

b) la vitesse de translation ;

c) l'axe central du torseur des vitesses.

Cet axe central, noté $D(t)$ sera défini en exprimant y et z en fonction de x et t.

3 - Montrer que toute droite $D(t)$ rencontre un cercle fixe Γ du plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.
Par tout point de Γ combien passe-t-il de droites $D(t)$ distinctes ?
Quel est l'angle formé par deux droites $D(t)$ qui se coupent en un point de Γ ?

4 - Montrer que toute droite $D(t)$ rencontre une droite fixe Δ du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Par tout point de Δ, convenablement choisi, combien passe-t-il de droites $D(t)$ distinctes ?

5 - Soit Σ la surface engendrée par les droites $D(t)$ quand t varie.
Σ est coupée selon une courbe C_b par le plan P, d'équation : $x = b$.
Pour étudier les courbes C_b, le plan P est rapporté au repère : $(O' ; \vec{j}, \vec{k})$, O' étant le point commun à P et à la droite Δ du 4°. C_b est définie par son équation en coordonnées polaires, $(O' ; \vec{j})$ étant l'axe polaire.
Que peut-on dire des courbes C_b et C_{-b} ? Quelle est la courbe C_o ?
Tracer avec soin les courbes $C_{\frac{a}{2}}$, C_a, $C_{\frac{6a}{5}}$; on déterminera les points de la dernière courbe où la tangente est parallèle à $\vec{k}$; on prendra $a = 2$ cm.

6 - On considère la courbe L de la surface Σ définie par : $x = a \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \sin t$;
L se trouve ainsi définie par une représentation paramètrique en t.
Montrer que la normale à la surface Σ en un point M de L passe par un point fixe K quand M décrit L ; Calculer KM.

7 - On lie au solide S le repère orthonormé : $(A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$; $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont obtenus en normant les vecteurs définis par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$; $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$.
Ecrire la matrice de passage Π de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. En considérant Π comme une matrice de rotation, déterminer l'axe et l'angle de cette rotation ; en déduire Π^4.

8 - Montrer que chaque point Q de la droite menée par C parallèlement à AB a une trajectoire plane ; comment peut-on passer des courbes C_b (du 5°) à ces trajectoires ?