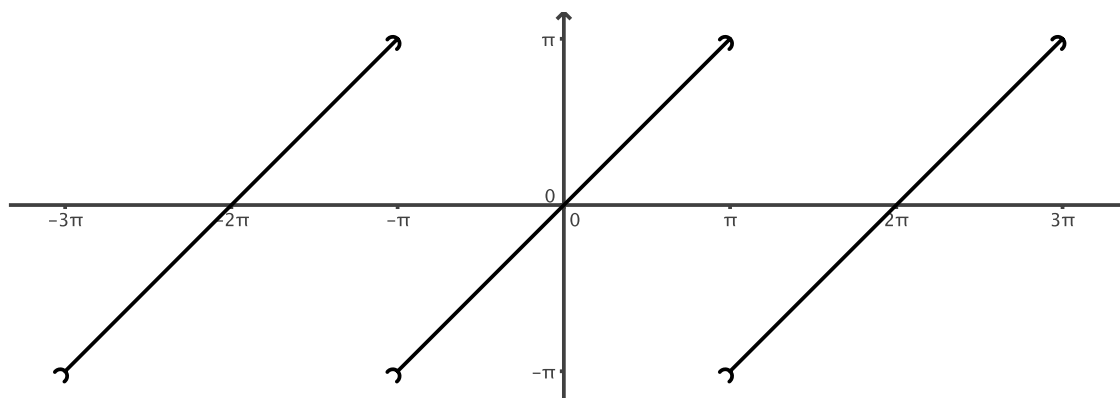


La fonction Dilogarithme

Partie I : Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Remarque. La définition prise pour a_0 n'est pas celle du programme. Ici, $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) dt$. Cela n'avait cependant aucune conséquence sur la suite, puisqu'on verra plus tard que $a_0 = 0$.

1.

2. g est impaire, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0}$$

3. $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t \sin(nt)}_{\text{fonction paire}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{On pose : } u(t) &= t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= \sin(nt) & v(t) &= \frac{-\cos(nt)}{n} \end{aligned}$$

u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, par intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-(-1)^n \pi}{n} + 0 \right) = \boxed{(-1)^{n-1} \frac{2}{n}}.$$

4. g est 2π -périodique.

$x \mapsto x$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc par restriction à $] -\pi, \pi]$, g est \mathcal{C}^1 par morceaux sur $] -\pi, \pi]$. Comme g est 2π -périodique, g est \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout x réel, la série de Fourier de g en x converge, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \underbrace{\frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}}_{\text{régularisée de } g}$$

Or, si $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\frac{g(x^+) + g(x^-)}{2} = g(x)$

et, si $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\frac{g(x^+) + g(x^-)}{2} = 0 \neq g(x)$ car $g(x) = \pi$.

Finalement,

$$S(x) = g(x) \text{ si et seulement si } x \neq \pi [2\pi]$$

5. g est 2π -périodique et \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , donc \mathcal{C}^0 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de Parseval, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, et, comme tous les a_n sont nuls :

$$\frac{1}{T} \int_0^T (g(t))^2 dt = \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} b_n^2$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t^2}_{\text{fonction paire}} dt = \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} (-1)^{2n-2} \frac{4}{n^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\ \Leftrightarrow & \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \end{aligned}$$

Partie II : Régularité de la fonction f

1. D'après le cours,

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

2. En divisant par $(-x)$, lorsque $x \neq 0$, on obtient alors $f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$, donc

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

3. f admet un DL_1 en 0, donc f est dérivable en 0, et $f'(0)$ correspond au coefficient d'ordre 1 du DL . Ainsi,

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}$$

4. $x \mapsto 1 - x$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et pour $x < 1$, cette fonction est à valeurs dans \mathbb{R}_*^+ .
 $x \mapsto \ln x$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_*^+ .

Par composition, $x \mapsto \ln(1 - x)$ est \mathcal{C}^∞ sur $] - \infty; 1[$

$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

Par produit, f est \mathcal{C}^∞ (et donc dérivable) sur $\mathcal{D} =] - \infty; 0[\cup] 0; 1[$, et :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = - \left(\frac{-1}{1-x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{-x^2} \right)$$

soit encore

$$\forall x \in] - \infty; 0[\cup] 0; 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

5. On a vu que f est \mathcal{C}^∞ , et donc \mathcal{C}^1 sur $] - \infty; 0[\cup] 0; 1[$, et que f est dérivable en 0. Il reste donc à montrer que f' est continue en 0.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} (1 + x + o(x)) + \frac{1}{x^2} (-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= \frac{1}{x} + 1 + o(1) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Il en résulte que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = f'(0)$: f' est continue en 0, et par conséquent :

$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }] - \infty; 1[$$

Partie III : Développement en série entière de L

1. a. f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1; 1[$ et $0 \in [-1; 1[$. L est la primitive de f sur $[-1; 1[$ qui s'annule en 0 : L est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1; 1[$.

b. De plus, on a :

$$\forall x \in [-1; 1[, L'(x) = f(x)$$

2. a. D'après le cours, $\forall x \in]-1; 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ ($\mathcal{R} = 1$).

Ainsi,

$$\forall x \in]-1; 1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\mathcal{R} = 1)$$

b. En divisant par x , on obtient : $\forall x \in]-1; 1[\setminus\{0\}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \stackrel{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}$ ($\mathcal{R} = 1$)

Cette formule est encore vraie pour $x = 0$ (Tous les termes de la série sont alors nuls, sauf le 1er qui vaut 1), d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} \quad (\mathcal{R} = 1)$$

3. a. Par primitivation terme à terme d'une série entière, comme $L(0) = 0$,

$$\forall x \in]-1; 1[, L(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (\mathcal{R} = 1)$$

et en effectuant le changement d'indice $n = k + 1$, on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (\mathcal{R} = 1)$$

b. $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R} = 1$ non nul, et de somme L sur $] -1; 1[$. On va appliquer le théorème radial d'Abel pour $x_0 = -1$ ($|-1| = \mathcal{R}$).

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente car $2 > 1$. On en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

D'après le théorème radial d'Abel, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

L étant continue en -1 ,

$$L(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

c. On procède de même avec $x_0 = 1$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème radial d'Abel,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{somme d'une série convergente}}$$

donc L se prolonge par continuité en 1

d. f est continue sur $[0; 1[$. $\int_0^1 f(t) dt$ est donc une intégrale impropre en 1.

D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \int_0^x f(t) dt$ existe et est finie. Donc par définition,

$$\int_0^1 f(t) dt \text{ est une intégrale convergente}$$

De plus, $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \int_0^1 f(t) dt$,

soit, d'après la question 3.c., $\int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Et en utilisant le résultat obtenu à la question I.5., on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = L(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

4. a. $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est continue sur \mathbb{R}_*^+ . J est donc impropre en 0 et en $+\infty$.

Etude en 0

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ car $e^x - 1 \sim_0 x$. Donc,

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x - 1} dx \text{ est faussement impropre en 0}$$

Etude en $+\infty$

$x^2 \cdot \frac{x}{e^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

donc, au voisinage de $+\infty$:

$$0 \leq \left| x^2 \cdot \frac{x}{e^x - 1} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left| \frac{x}{e^x - 1} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, car $2 > 1$. D'après le critère de domination,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \text{ est absolument convergente, donc convergente.}$$

En conclusion,

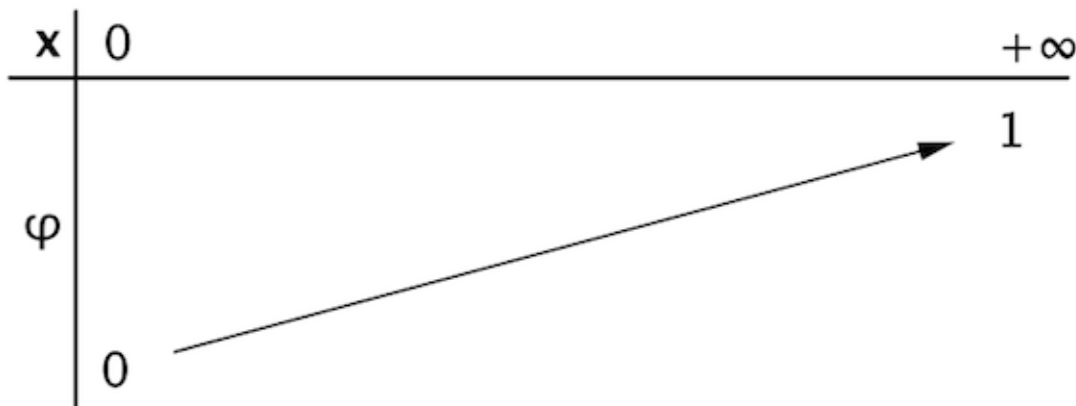
$$J \text{ converge}$$

b. **Remarque.** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\infty; 1[, t = 1 - e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - t \Leftrightarrow x = -\ln(1 - t)$.

On effectue le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$:

Soit $\phi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .
 $x \mapsto 1 - e^{-x}$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \phi'(x) = e^{-x} > 0$. D'où le tableau :



ϕ réalise une bijection de \mathbb{R}_*^+ dans $]0; 1[$

Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ $\forall t \in]0; 1[, -\ln(1 - t) < 0$, donc f est négative sur $]0; 1[$.
 $t \mapsto \frac{-\ln(1 - t)}{t}$

Comme $\int_0^1 f$ est convergente et que f garde un signe constant sur $]0; 1[$,

f est intégrable sur $]0; 1[$

On a également,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(\phi(x)) \cdot |\phi'(x)| = \frac{-\ln(1 - (1 - e^{-x}))}{1 - e^{-x}} \cdot e^{-x} = \frac{-\ln(e^{-x})}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{-(-x)}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1}$$

D'après le théorème du changement de variables pour les fonctions intégrables, $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur \mathbb{R}_*^+ (ce que l'on savait déjà, car J converge et cette fonction est toujours positive), et,

$$J = \int_{]0; 1[} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$$

en utilisant le résultat de la question III.3.d.

5. a. Soit $\forall x \in [-1; 1]$, $h(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$.

$x \mapsto x$, $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x^2$ sont trois fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $[-1; 1]$, et dérivable de $] - 1; 1[$ dans $] - 1; 1[$.

L est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] - 1; 1[$.

Par composition, h est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] - 1; 1[$, et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in] - 1; 1[, \quad h'(x) &= L'(x) - L'(-x) - \frac{2x}{2}L'(x^2) \\ &= f(x) - f(-x) - xf(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall x \in] - 1; 1[\setminus\{0\}, \quad h'(x) &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + x \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln(1-x^2)}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\ln(1-x^2) = \ln((1-x)(1+x)) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$ sur $] - 1; 1[$.

Par conséquent, h est constante sur $] - 1; 1[$, et comme h est continue sur $[-1; 1]$, elle est constante sur $[-1; 1]$.

Or, $h(0) = L(0) + L(0) - \frac{1}{2}L(0) = 0$ car $L(0) = 0$.

En conclusion, $\forall x \in [-1; 1]$, $h(x) = 0$,

soit encore :

$$\boxed{\forall x \in [-1; 1], \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)}$$

b. Appliquons la formule précédente en $x = -1$:

$$L(-1) + L(1) = \frac{1}{2}L(1)$$

ce qui équivaut à : $L(-1) = \frac{1}{2}L(1) - L(1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ d'après III.3.d.
d'où, finalement

$$\boxed{L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Partie IV : Etude d'une équation différentielle

1. a. L'équation $\mathcal{E}'_0 : xz' + z = 0$ a les mêmes solutions sur K que l'équation $\mathcal{E}''_0 : z' + \frac{1}{x}z = 0$.

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet $x \mapsto \ln|x|$ comme primitive sur K , d'après le cours, les solutions de \mathcal{E}''_0 sont donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\ln|x|} = \frac{\lambda}{|x|} = \frac{A}{x}$, en notant $A = \lambda$ si $K =]0, 1[$ et $A = -\lambda$ sinon, λ étant une constante réelle. Donc :

Les solutions de \mathcal{E}'_0 sur K sont de la forme $x \mapsto \frac{A}{x}$, où A est une constante réelle.

b. Commençons par montrer que f est une solution particulière de \mathcal{E}' .

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \quad x f'(x) + f(x) &= x \left(\frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right) + \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi f est une solution particulière de \mathcal{E}' sur K . Or d'après le cours : «Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation homogène associée. »

Donc :

Les solutions de \mathcal{E}' sur K sont de la forme $x \mapsto f(x) + \frac{A}{x}$, où A est une constante réelle.

2. En posant $z = y'$, y est solution de \mathcal{E} sur K si et seulement si z est solution de \mathcal{E}' sur K .

Or $\forall x \in K, z(x) = f(x) + \frac{A}{x} = y'(x)$, $A \in \mathbb{R}$.

En primitivant, les solutions de \mathcal{E} sur K sont les fonctions y de la forme :

$y : x \mapsto L(x) + A \ln|x| + B$ avec A et B deux constantes réelles.

3. a. Les constantes d'intégration sont alors, a priori, différentes sur chaque intervalle. Donc :

Il existe quatre constantes réelles A_1, B_1, A_2, B_2 , telles que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 0[, \quad y(x) &= L(x) + A_1 \ln(-x) + B_1 \\ \forall x \in]0, 1[, \quad y(x) &= L(x) + A_2 \ln(x) + B_2 \end{aligned}$$

b. **Remarque.** y est solution de \mathcal{E} sur $[-1; 1[$ si et seulement si y est \mathcal{C}^2 sur $[-1; 1[$ et vérifie \mathcal{E} sur $[-1; 1[$.

Etude de la continuité de y en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = L(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

Ainsi,

y admet une limite finie en 0^- si et seulement si $A_1 = 0$ et alors, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} y(x) = B_1$.

y admet une limite finie en 0^+ si et seulement si $A_2 = 0$ et alors, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y(x) = B_2$.

Donc, pour que y soit continue en zéro, il faut que $A_1 = A_2 = 0$ et $B_1 = B_2$.

On a alors, $y(0) = B_1 = L(0) + B_1$.

Finalement, y est de la forme $y : x \mapsto L(x) + B$ où B est une constante réelle.

Etude des dérivées de y en 0

Le calcul de y' fera disparaître la constante B et n'apportera donc aucune condition supplémentaire.

Conclusion :

Les solutions de \mathcal{E} sur $[-1, 1[$ sont parmi les fonctions y de la forme $y : x \mapsto L(x) + B$ où B est une constante réelle.

c. Soit $y : x \mapsto L(x) + B$, $B \in \mathbb{R}$.

- y est alors \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1[$ puisque L l'est (question III.1.a.),
- y est solution de \mathcal{E} sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$ (question IV.2.).

Il ne reste qu'à vérifier que $y'(0) = 1 = \frac{1}{1-0}$ pour que y vérifie \mathcal{E} en 0 et donc sur $[-1, 1[$.

Or $\forall x \in]-1; 1[$, $y'(x) = L'(x) + 0 = f(x)$ donc $y'(0) = f(0) = 1$.

Conclusion :

Les solutions de \mathcal{E} sur $[-1, 1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto L(x) + B$, $B \in \mathbb{R}$.

Rédigé par : Frédérique et Fabien Evrard, TSI 2 et PT, Lycée Rouvière, Toulon.