Epreuve E3A Maths 2 PSI- corrigé

Préliminaires

1. $u = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. On distingue trois cas :
   - Si $\theta = \pi$, alors $u = 0$ et u n'a pas d'argument.
   - si $\theta < \pi$, $|u| = 2\cos(\theta/2)$ et $\arg(u) \equiv \theta/2 \quad (2\pi)$;
   - si $\theta < \pi$, $|u| = -2\cos(\theta/2)$ et $\arg(u) \equiv \pi + \theta/2 \quad (2\pi)$ si $\theta > \pi$.
2. 2.1.

   2.1.1. $P_1(X) = 3X^2 - 1$, $P_2(X) = 5X^4 - 10X^2 + 1$.

   2.1.2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant < 0, ce qui n'est pas le cas de P_1, ni évidemment de P_2.

   2.2.

   2.2.1. Avec la formule du binôme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{i^k - (-i)^k}{2i}\right) X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \operatorname{Im}(i^k) X^{2n+1-k}.$$

   Or $\operatorname{Im}(i^k) = 0$ si k est pair, donc :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2n-2k}.$$

   On en déduit que P_n est élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, donc de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, de degré $2n$ et de coefficient dominant $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

   2.2.2. L'espression (sic) générale est : $z_k = e^{i2k\pi/N}$, pour $1 \leq k \leq N$.

   2.2.3. $P_n(i) = (2i)^{2n} = (-1)^n 2^{2n}$.

   2.2.4. Si $P_n(z) = 0$, alors $|z+i| = |z-i|$, ce qui montre que z est sur la médiatrice du segment $[-i, i]$, donc $z \in \mathbb{R}$.

   2.2.5. Si $P_n(a) = 0$, alors $a \neq i$ d'après 2.2.3 et $\dfrac{a+i}{a-i}$ est racine $(2n+1)$-ème de 1. On en déduit (par 2.2.2) qu'il existe $k \in \{0, \ldots, 2n+1\}$ tel que $\dfrac{a+i}{a-i} = e^{i2k\pi/(2n+1)}$. Or $\dfrac{a+i}{a-i} \neq 1$, donc $k \neq 2n+1$, ce qui montre le sens direct après réduction.
   Réciproquement, s'il existe $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ tel que $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$, alors $(a-i)e^{2ik\pi/(2n+1)} = a+i$ donc $(a-i)^{2n+1} = (a+i)^{2n+1}$ et enfin $P_n(a) = 0$.

   2.2.6. Soit $k \in \{1, \ldots, 2n\}$. On résout : $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$, et comme $e^{2ik\pi/(2n+1)} \neq 1$, il vient : $a = \dfrac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))}$ (licite car $k\pi/(2n+1) \neq \pi/2$). Chaque valeur de k fournit une valeur distincte de a, on a donc $2n$ racines distinctes pour un polynôme de degré $2n$, donc exactement toutes les racines de P_n.

   2.2.7. D'après le calcul fait au 2.2.1 :

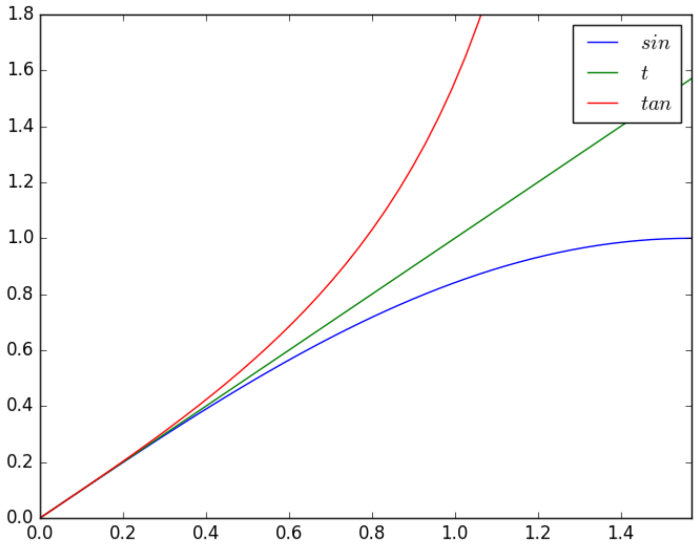
$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}.$$

   2.2.8. $Q_1(X) = 3X - 1$ (racine 1/3), $Q_2(X) = 5X^2 - 10X + 1$ (racines : $1 \mp 2/\sqrt{5}$).

   2.2.9. Les racines de Q_n sont les carrés des racines de P_n. Précisément, comme $\tan((2n+1-k)\pi/(2n+1)) = -\tan(k\pi/(2n+1))$, les racines de Q_n sont $\dfrac{1}{\tan^2(k\pi/(2n+1))}$, pour $1 \leq k \leq n$.
3. On reconnaît la somme des racines de $Q_n(X)$, donc d'après les relations coefficients racines :

$$S_n = -\frac{-\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4.



Pour $0 < x < \pi/2$, les inégalités sont strictes et :

$$0 < \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

On élève au carré et avec $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$:

$$0 < \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}.$$

5. D'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ici $\alpha = 2$.
On applique l'encadrement du 4 aux termes de S_n, il vient :

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}} \leq n + S_n.$$

Comme $S_n \sim 2n^2/3$ d'après 3., on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \sim 2n^2/3$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1

1. On pose $u(t) = \dfrac{t^{s+1}}{s+1}$ et $v(t) = \ln(t)$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0, 1]$ et $u(t)v(t) \to 0$ quand t tend vers 0. D'après le théorème d'intégration par parties, sous réserve de la convergence d'une des intégrales :

$$\int_0^1 t^s \ln(t)\,\mathrm{d}t = [\frac{t^{s+1}}{s+1}\ln(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^s}{s+1}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit la convergence de J_s et $J_s = \dfrac{-1}{(s+1)^2}$.

2. 2.1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$. Elle est de signe constant, il s'agit donc d'étudier son intégrabilité sur $]0,1[$.

   En 0, $f(t) \sim -t^x \ln(t)$, donc f est intégrable au voisinage de 0 si $x > -1$ d'après 1. Si $x \leq -1$, alors $t^x = o(f(t))$ en 0. Or, d'après le critère de Riemann, $t \mapsto t^x$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, donc f non plus.

   En 1, $f(t) \sim \dfrac{\ln(t)}{t-1} \sim 1$, donc f est prolongeable par continuité en 1.

   Finalement, f est intégrable (et donc, $H(x)$ est bien définie) si et seulement si $x > -1$.

   2.2. Pour tout $t \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(t)}{t-1} > 0$ et $x \mapsto t^x$ est décroissante, donc l'intégrande est une fonction décroissante de x. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que H est décroissante sur D_H.

   2.3. Notons cette fois $f : t \mapsto \dfrac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$.

   Cette fonction est continue sur $]0,1[$ d'après les théorèmes généraux.

   Comme $\alpha > 0$, par croissances comparées : $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$.

   Au voisinage de 1, $f(t) \sim 1 - t \to 0$, donc f admet un prolongement par continuité en 0 et en 1, nécessairement borné car une fonction continue sur un segment est bornée.

   2.4. Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est de classe C^1 sur D_H, de dérivée $x \mapsto \dfrac{t^x (\ln(t))^2}{t-1}$.

   Pour tout $x \in D_H$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (vu au 2.1) et la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x (\ln(t))^2}{t-1}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ (théorèmes généraux).

   Enfin, fixons un segment $[a,b] \subset D_H$. Pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\left| \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1} \right| \leq \left| \frac{t^a (\ln(t))^2}{t-1} \right|.$$

   Notons $\varphi : t \in]0,1[\mapsto \dfrac{t^a (\ln(t))^2}{t-1}$. C'est une fonction continue par morceaux sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (de la même façon qu'au 2.3), et en 0 : $\varphi(t) \sim -t^a (\ln(t))^2$. Soit $c \in]-1, a[$. Alors $t^{a-c}(\ln(t))^2 \to 0$ en 0 par croissance comparée, donc $\varphi(t) = o(t^c)$. Or $t \mapsto t^c$ est intégrable au voisinage de 0 par le critère de Riemann, donc φ est, finalement, intégrable sur $]0,1[$, ce qui assure la domination des dérivées.

   D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, H est C^1 sur D_H et, pour tout $x \in D_H$, $H'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1} \, \mathrm{d}t$. La fonction intégrée est négative, donc $H'(x) \leq 0$, ce qui confirme que H est décroissante sur D_H.

   2.5. Fixons $\alpha > -1$.

   Pour tout $t \in]0,1[$, $\dfrac{t^{x_n} \ln(t)}{t-1} \to 0$ car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} t^x = 0$.

   À partir d'un certain rang n_0, $x_n > \alpha$, donc $0 \leq \dfrac{t^{x_n} \ln(t)}{t-1} \leq \dfrac{t^\alpha (\ln t)}{t-1}$. Cette dernière fonction est intégrable sur $]0,1[$ d'après 2.1, ce qui assure la domination.

   D'après le théorème de convergence dominée, $H(x_n) \to 0$.

   Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} H(x) = 0$.

   2.6. Pour $x > -1$,

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{(t^x - t^{x+1}) \ln(t)}{t-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^x \ln(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(1+x)^2}$$

   (d'après 1.)

   2.7. On a $H(x) = H(x+1) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Or H est continue en 0, donc $H(x) \sim \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en -1.

2.8.

2.8.1. Pour x fixé, $\dfrac{1}{(x+k)^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$ et le critère de Riemann assure la convergence.

2.8.2. D'après 2.6, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H(x+k-1)-H(x+k) = \dfrac{1}{(x+k)^2}$. On somme pour $k \in \{1, \dots, n\}$, et le résultat vient par téléscopage.

2.8.3. Pour x fixé, $H(x+n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ d'après 2.5. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité du 2.8.2, il vient : $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

2.8.4. $H(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $H(1) = H(0) - 1$.

Partie 2

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(x+t)^2}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \le \frac{1}{(x+t)^2} \le \frac{1}{(x+k)^2}.$$

On obtient l'encadrement demandé par intégration sur $[k, k+1]$.

2. On somme de 1 à $+\infty$ (licite avec 2.8.3), il vient :

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \le \frac{1}{x+1} \le H(x),$$

soit $\dfrac{1}{x+1} \le H(x) \le \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$, donc $H(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

3. 3.1. $H(n) \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge (critère de Riemann).

L'encadrement du 2. a montré que $0 \le H(x) - \dfrac{1}{x+1} \le \dfrac{1}{(x+1)^2}$. On en déduit $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, et comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument, on en déduit que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

3.2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} \sum_{n=0}^{N} (-t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} \,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+1} \ln(t)}{t^2-1} \,\mathrm{d}t.$$

Comme $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \le \dfrac{\ln(t)}{t-1}$, le second terme est dominé par $H(N)$ et tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} \,\mathrm{d}t.$$

3.3. On pose $v = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est C^1 sur $]0,1[$, strictement croissante, et bijective de $]0,1[$ sur $]0,1[$, donc :

$$\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1} \,\mathrm{d}v = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\ln(t)}{t-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} H(-1/2).$$

(On peut en déduire $H(-1/2) = \pi^2/2$ avec une technique d'intégration terme à terme mais ce n'est pas demandé.)

Partie 3

1. 1.1. On pose $u(t) = \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $v(t) = [\ln(t)]^q$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $]0,1]$, et $\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$.
   On en déduit :
$$I_{p,q} = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{qt^p[\ln(t)]^{q-1}}{p+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

   1.2. On en déduit par récurrence : $I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

2. 2.1. On note ici $f : t \mapsto \dfrac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}$. C'est une fonction continue sur $]0,1[$, qui tend vers 0 quand t tend vers 1 (car $f(t) \sim (t-1)^n$). Au voisinage de 0, $\sqrt{t}f(t) \sim \sqrt{t}[\ln(t)]^{n+1} \to 0$, donc $f(t) = o(1/\sqrt{t})$ et f est intégrable au voisinage de 0 (critère de Riemann).
   Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$, donc B_n est bien défini.

   2.2. Pour tout $t \in]0,1[$, $\dfrac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1} = -\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} t^p[\ln(t)]^{n+1}$.
   Or $\displaystyle\int_0^1 |t^p[\ln(t)]^{n+1}|\,\mathrm{d}t = |I_{p,n+1}| = \dfrac{(n+1)!}{(p+1)^{n+2}}$. Comme $n+2>1$, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \dfrac{(n+1)!}{(p+1)^{n+2}}$ converge et, d'après le théorème d'intégration terme à terme,
$$\int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} -\int_0^1 t^p[\ln(t)]^{n+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} -I_{p,n+1}.$$

   2.3. Avec la formule trouvée au 1.2,
$$B_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{(p+1)^{n+2}} = (-1)^n (n+1)! Z_{n+2}.$$

3. Comme pour tout $t>0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t^x = e^{x\ln(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k[\ln(t)]^k}{k!}$:
$$H(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k[\ln(t)]^{k+1}}{k!(t-1)}\,\mathrm{d}t.$$
   Or, comme l'intégrande est de signe constant sur $]0,1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|x|^k|\ln(t)|^{k+1}}{k!(t-1)}\,\mathrm{d}t = |B_k|\frac{|x|^k}{k!} = (k+1)Z_{k+2}|x|^k \leq (k+1)Z_2|x|^k$. La série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(k+1)x^k$ est de rayon 1 (série dérivée de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} x^k$), donc $\sum (k+1)Z_2|x|^k$ converge si $|x|<1$, et donc également $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{|x|^k|\ln(t)|^{k+1}}{k!(t-1)}\,\mathrm{d}t$, par comparaison.
   D'après le théorème d'intégration terme à terme,
$$H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^k[\ln(t)]^{k+1}}{k!(t-1)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k(k+1)Z_{k+2}x^k.$$

4. Notons R le rayon de convergence.
   La formule du 3. est valide sur $]-1,1[$, donc $R \geq 1$.
   Si $R>1$, alors H admet une limite finie en -1, ce qui contredit 2.7 (partie 2), donc $R=1$.