

Concours d'Admission 1976

MATHEMATIQUES I

On désigne par \mathcal{F}_1 l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) du corps des réels \mathbb{R} dans le corps des complexes \mathbb{C} , par \mathcal{F}_2 l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} .

Étant donné un élément (f, a) de $\mathcal{F}_2 \times \mathbb{R}$, on note $f(a, \cdot)$ [respectivement $f(\cdot, a)$] l'élément de \mathcal{F}_1 défini par $\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(a, x)$ [respectivement, $\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x, a)$].

Étant donné un élément f de \mathcal{F}_2 , on désigne par $\mathcal{D}(f)$ [respectivement $\mathcal{G}(f)$] le sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_1 dont une famille génératrice est $(f(a, \cdot))_{a \in \mathbb{R}}$ [respectivement $(f(\cdot, a))_{a \in \mathbb{R}}$].

Les parties II et III sont indépendantes, mais la partie III utilise la notation $\mathcal{E}(f)$ vue dans la partie II.

Partie I

1°) Soit f un élément de \mathcal{F}_2 .

a) On suppose $\mathcal{D}(f)$ de dimension finie ℓ strictement supérieure à 0. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell) \in \mathcal{F}_1^\ell$ et $(a_1, a_2, \dots, a_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ tels que l'on ait:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(x) f(a_i, y).$$

b) Démontrer que $\mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{G}(f)$ sont simultanément soit de dimension finie (et que dans ce cas ils ont même dimension), soit de dimension infinie. Cette dimension commune, finie ou infinie, est notée $r(f)$; on l'appelle rang de f . On montrera que $r(f) = 0$ caractérise la fonction nulle.

2°) a) Soit $f \in \mathcal{F}_2$ et $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. On pose, pour tout élément (x, y) de \mathbb{R}^2 , $g(x, y) = e^{px+qy} f(x, y)$. Montrer que l'on a $r(g) = r(f)$.

b) Quel est le rang de la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = P(x + y)$, où P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$, de degré n ?

c) Quel est le rang de f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = e^{xy}$?

3°) On désigne par Φ le sous-ensemble des fonctions de \mathcal{F}_2 de rang fini et par Φ^* cet ensemble Φ privé de la fonction nulle.

a) Montrer l'équivalence des propositions suivantes:

(A) $f \in \Phi^*$

(B) Il existe au moins un entier n strictement positif et $2n$ fonctions

$u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$, éléments de \mathcal{F}_1 tels que l'on ait:

$$(1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(y)$$

Φ est donc un sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_2 . Une relation telle que (1) constituera une décomposition de f , et n sera la longueur de cette décomposition.

b) Montrer que la plus petite longueur d'une décomposition d'un élément f de Φ^* est égale à $r(f)$. Toute décomposition de f de longueur $r(f)$ sera dite minimale.

c) Établir que si la relation (1) est une décomposition minimale pour $f \in \Phi^*$, alors $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sont respectivement des bases de $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{D}(f)$.

d) Montrer que si $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sont des systèmes libres dans \mathcal{F}_1 , la relation (1) représente une décomposition minimale de f .

e) Démontrer que, la relation (1) étant minimale, pour que la relation

$$(2) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} s_i(x)t_i(y)$$

soit aussi minimale, il faut et il suffit qu'il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice A régulière telle que l'on ait

$$(3) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t_1(y) \\ t_2(y) \\ \vdots \\ t_n(y) \end{pmatrix} = ({}^t A)^{-1} \begin{pmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \\ \vdots \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

4°) Démontrer que si f est de classe m (c'est-à-dire possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m inclus et que ces dérivées partielles sont continues), dans toute décomposition minimale telle que (1), les fonctions $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$, sont de classe m .

5°) On suppose que f est une fonction polynôme de deux variables x et y réelles, que l'on peut écrire

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)y^i = \sum_{j=0}^{j=h} Q_j(y)x^j = (1 \quad y \quad \dots \quad y^k) M \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^h \end{pmatrix},$$

où les P_i et Q_j sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et M une matrice complexe. Démontrer que le rang de f est égal au rang du système (P_0, P_1, \dots, P_k) , au rang du système (Q_0, Q_1, \dots, Q_h) , et au rang de la matrice M .

Partie II

On suppose que l'élément f de Φ est une fonction symétrique, c'est-à-dire que l'on a: $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(y, x)$. $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{D}(f)$ se confondent alors en un même sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_1 noté $\mathcal{E}(f)$.

1°) a) Montrer qu'il existe une matrice A symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et une seule, telle que l'on ait:

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (u_1(x) \quad u_2(x) \quad \dots \quad u_n(x)) A \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ u_n(y) \end{pmatrix}$$

b) En déduire qu'il existe une décomposition minimale de f de la forme

$$(4) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(x)w_i(y)$$

2°) Déterminer, pour la fonction polynôme f définie par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + y)^m$, m entier strictement positif, une décomposition minimale telle que (4).

Partie III

Soit \mathcal{A} le sous espace vectoriel de \mathcal{F}_1 formé des fonctions g de \mathcal{F}_1 de classe infinie et possédant la propriété suivante: la fonction f de \mathcal{F}_2 définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = g(x + y)$ est de rang fini, qui sera par définition celui de g . $\mathcal{E}(f)$ sera alors également noté $\mathcal{E}(g)$.

1°) Déterminer les fonctions g de rang 1. On montrera qu'une telle fonction ne prend jamais la valeur zéro.

2°) a) Montrer que la fonction g de \mathcal{F}_1 , définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$, P étant un polynôme non nul à coefficients complexes de degré p et α un élément de \mathbb{C} , appartient à \mathcal{A} , et est de rang $p + 1$.

b) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, désignant k nombres complexes distincts, P_1, P_2, \dots, P_k désignant des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$, on considère la fonction h de \mathcal{F}_1 définie par

$$(5) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \sum_{i=1}^{i=k} e^{\lambda_i x} P_i(x)$$

Établir que h appartient à \mathcal{A} et que son rang est égal à $\sum_{i=1}^{i=k} 1 + \deg(P_i)$.

(On pourra utiliser la propriété suivante après l'avoir justifiée: si, pour tout x réel, les k polynômes Q_1, Q_2, \dots, Q_k de $\mathbb{C}[X]$ satisfont à la relation $\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i x} Q_i(x) = 0$, alors ils sont tous nuls.)

3°) Soit $g \in \mathcal{A}$, g de rang $p > 1$. On considère une décomposition minimale

$$g(x + y) = \sum_{i=1}^{i=p} u_i(x) v_i(y).$$

a) Montrer que l'on a: $g' \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{E}(g') \subset \mathcal{E}(g)$, g' désignant la dérivée de g .

b) Montrer qu'il existe un complexe α , éventuellement nul, tel que la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto e^{\alpha x} [g'(x) + \alpha g(x)]$ soit un élément de \mathcal{A} de rang strictement inférieur à p .

c) En déduire que toute fonction g de \mathcal{A} est de la forme (5).

d) Soit $g \in \mathcal{F}_1$, g continue et telle que la fonction de \mathcal{F}_2 définie sur \mathbb{R}^2 par $(x, y) \mapsto g(x + y)$ soit de rang fini. Démontrer que g est de classe infinie. (On pourra considérer une primitive de g).