Un corrigé : X-ENS INFO-Fondamentale 2024
Couverture minimale d'un graphe

Pour toutes les remarques ou corrections, vous pouvez m'envoyer un mail à `galatee.hemery@gmail.com`

Partie I

Question I.1. *Dans ce corrigé, je me permet d'utiliser couverture pour ensemble couvrant (par habitude) et le verbe couvrir. X couvre $\{u, v\}$ lorsque $u \in X$ ou $v \in X$.*
On a $\tau(G) = 2$ car $\{b, d\}$ est une couverture et aucun singleton ne convient.
On a $\alpha(G) = 2$ car $\{a, d\}$ est un ensemble indépendant et tout ensemble de taille 3 contient au moins deux sommets dans la clique de taille 3 $\{b, c, d\}$ donc n'est pas indépendant.
On a $\mu(G) = 2$ car $\{a, b\}, \{c, d\}$ forme un couplage parfait.

Question I.2. $\tau(K_n) = n - 1$ car pour tout sous-ensemble de cardinal au plus $n - 2$, il existe une arête entre les deux sommets mis à l'écart qui n'est pas couverte et tout ensemble contenant tous les sommets sauf 1 couvre toutes les arêtes.
$\tau(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ car $\{2, 4, ..., 2 \times \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ convient et avec moins de sommets on a au moins deux sommets consécutifs reliés qui ne sont pas dans l'ensemble de sommets considérés et il ne peut pas être une couverture.
$\tau(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, on doit en particulier couvrir les arêtes de P_n et en plus la dernière arête. On a besoin de prendre 1 ou n pour couvrir la dernière arête en plus dans le cas impair.
$\tau(K_{a,b}) = \min(a, b)$, on prend l'un des deux ensembles de cardinal a ou b et on couvre toutes les arêtes.
Si $a \leq b$ sans perte de généralité, avec $a - 1$ sommets, on a au moins un sommet du côté "a" non sélectionnés dans l'ensemble reliés à b sommets par b arêtes qui nécessitent $b > a - 1$ sommets pour être couvert. On ne peut pas avoir une plus petite couverture.

Question I.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Montrons que le complémentaire d'une couverture est un ensemble indépendant.
Soit X une couverture de G donc pour tout $\{u, v\} \in E$, $u \in X$ ou $v \in X$.
Soit $u', v' \in V \setminus X$, supposons par l'absurde que $\{u', v'\} \in E$, alors $u' \in X$ ou $v' \in X$ CONTRADICTION.
En particulier $|X| \geq \tau(G)$ par minimalité et $|V \setminus X| \leq \alpha(G)$ par maximalité donc $|X| \geq |V(G)| - \alpha(G)$.
Ainsi toute couverture de G est de cardinal au moins $|V(G)| - \alpha(G)$ et $\tau(G) \geq |V(G)| - \alpha(G)$.
Réciproquement, le complémentaire d'un ensemble indépendant est une couverture. Cela se montrer avec une démonstration similaire.
Ainsi, pour un ensemble indépendant de cardinal $\alpha(G)$, le complémentaire est une couverture de cardinal $|V(G)| - \alpha(G)$ et $\tau(G) = |V(G)| - \alpha(G)$.

Question I.4. Soit A un ensemble d'arêtes définissant un couplage maximal de G et soit C une couverture quelconque de G. Alors toute arête $a \in A$ est couverte par au moins un sommet de C ; donc $\mu(G) = |A| \leq |C|$ pour toute couverture C de G. En choisissant C une couverture minimale de G, on obtient $\mu(G) \leq \tau(G)$.

Question I.5. On parcourt l'ensemble des sous-ensembles de sommets, soit $2^{|V(G)|}$ ensembles à tester et on vérifie s'ils couvrent l'ensemble des arêtes en parcourant les arêtes, qui sont au plus $|V(G)|(|V(G)| - 1)/2$.
On garde en mémoire la taille du plus petit ensemble couvrant rencontré.
Un tel algorithme naïf atteint bien la complexité attendu.

Partie II

Question II.1. Soit X une couverture minimum de T, alors, comme $\{u, v\}$ est une arête, $u \in X$ ou $v \in X$.
Comme v est une feuille, $\{u, v\}$ est la seule arête d'extrémité v.
Si $v \notin X$, alors X convient, c'est une couverture minimum qui contient u, mais pas v.
Sinon, on pose $Y = (X \setminus \{v\}) \cup \{u\}$, l'arête $\{u, v\}$ est couverte par u et toute arête $\{u', v'\}$ sont telles que $u' \in X$ ou $v' \in X$ et $u' \neq v$ et $v' \neq v$ donc $u' \in Y$ ou $v' \in Y$. Y est une couverture de même cardinal que X donc c'est une couverture minimum qui contient u, mais pas v.

Question II.2. L'idée est de construire l'ensemble couvrant minimum en forçant des sommets sûrs et en réalisant un parcours de toutes les branches depuis les feuilles.

```
PARCOURS(T,X,i) :
    ENTREE : i feuille de T, un arbre (et des sommets isolés)
    e = élément de T[i]
    X[e] = Vrai
    POUR TOUT s dans T[j] : //ARRETES COUVERTES
        Enlever j de T[s]
        SI Card(T[s]) = 1 : // s est une feuille après retrait des arêtes de e
            PARCOURS(T,X,s)

MIN_COUV(T) :
    ENTREE : T un arbre ou un arbre
    SORTIE : une couverture minimum de l'arbre
    n = Taille(T)
    X = Tableau de n Faux
    T' = Copie de T
    POUR TOUT i = 1 à n :
        SI Card(T[i]) = 0 : //Feuille, on force le parent dans X
            PARCOURS(T',X,i)
    Y = Vide
    POUR TOUT i = 1 à n :
        SI X[i] = Vrai :
            Ajouter i à Y
    RENVOYER Y
```

La boucle dans `MIN_COUV` teste une fois chaque sommet et `PARCOURS` traite une fois chaque sommet car après l'exécution, le sommet n'est plus une feuille et les appels ne sont fait que pour les feuilles.
L'ensemble est bien traité car on supprime les arêtes de toutes les branches en partant des feuilles. Chaque nouvelle feuille est traitée immédiatement. A la fin, il n'y a plus de feuille (degré 1) donc l'arbre est traité entièrement.

Question II.3. *Cela semble bizarre de faire de la programmation dynamique pour cela, un parcours récursif de l'arbre depuis la racine suffit pour cela.*

```
CALCUL(T,DIN,DOUT,D,i,p) :
    ENTREE : T arbre, DIN,DOUT,D tableaux d'entiers, i,p sommets
    // p est le sommet "parent" de i dans l'arbre enraciné ou 0 pour la racine
    DIN[i] = 1 // i est dedans
    DOUT[i] = 0 // i n'y est pas
```

```
    POUR TOUT s dans T[i] différent de p :
        SI D[s] = -1 : // c'est le cas, on le découvre
            CALCUL(T,DIN,DOUT,D,s,i)
        DIN[i] = DIN[i] + D[s] //couverture de chaque sous-arbre
        //couverture de chaque sous-arbre en forcant la racine pour couvrir (i,s)
        DOUT[i] = DOUT[i] + DIN[s]
    D[i] = min(DIN[i],DOUT[i])

MIN_COUV(T) :
    ENTREE : Arbre T
    SORTIE : tau(T)
    n = Taille(T)
    DIN = Tableau de n (-1)
    DOUT = Tableau de n (-1)
    D = Tableau de n (-1)
    CALCUL(T,DIN,DOUT,D,1,0)
    RENVOYER D[1]
```

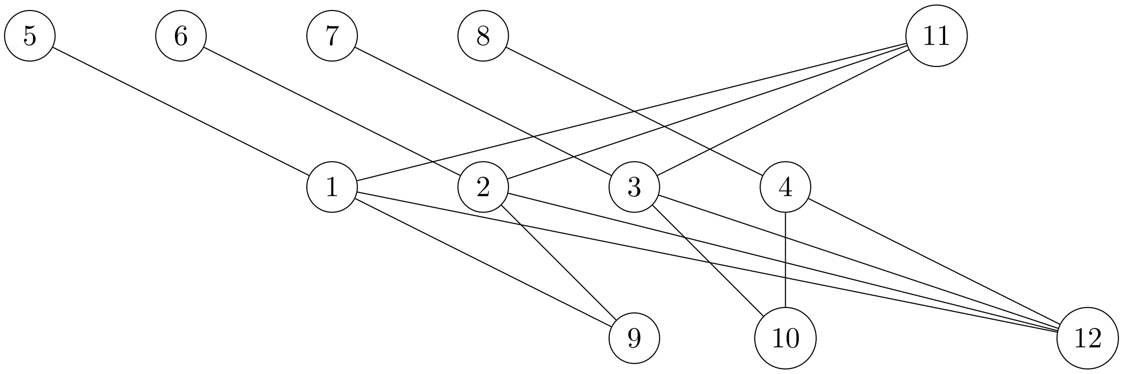
Chaque sommet est traité une et une seule fois par `CALCUL` car un appel est fait lorsque `D[s] = -1` et le graphe est connexe donc les sommets sont tous atteints.
Chaque appel à `CALCUL`, hors des appels récursifs réalise un nombre d'opérations en constant et un nombre d'opérations linéaire en le nombre d'arêtes sortant du sommet traité.
Au total en additionnant les complexités de tous les appels, la complexité est linéaire en le nombre d'arêtes et les nombre de sommets, qui sont égaux à 1 prés donc linéaire en le nombre de sommets.

Partie III

Question III.1. On a un invariant de boucle : l'ensemble des arêtes de G est exactement l'ensemble des arêtes non encore couverte par S.
En effet initialement, aucun arête n'est couverte et G contient toutes ses arêtes.
Lorsque l'on ajoute un sommet v de degré au moins 1, en l'ajoutant à S, on couvre exactement toutes les arêtes issue de v (au moins une) et enlever v est son voisinage permet de ne garder que les arêtes qui restent non couvertes.
Lorsque G n'a plus d'arêtes, S est une couverture.
Ainsi la fonction renvoie bien une couverture (ensemble couvrant).

Question III.2. On considère un graphe étoile G tel que $V(G) = \{1, ..., n\}$ et $E(G) = \{\{n, i\} | 1 \leq i \leq n-1\}$.
On a $OPT(G) = \tau(G) = 1$ car $\{n\}$ suffit.
Avec l'algorithme, si on considère les sommets dans l'ordre, on sélectionne $n-1$ sommets $\{1, ..., n-1\}$ dans S.
Ainsi, on a bien $\dfrac{\textsc{Heuristique}(G)}{\text{OPT}(G)} = n-1 \geq n-1$

Question III.3.



Ici, on a $OPT(G_4) = 4$ en prenant $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ comme ensemble.
$\textsc{Glouton}(G_4) = 8$ si on prend 12 de degré 4, puis 12 de degré 3, puis 10, puis 9 de degrés 2, puis 5,6,7,8 de degré 1.
On peut aussi 1,2,3,4 si car on a des égalités de degré, mais on considère le pire cas selon l'énoncé.

Question III.4. Avec la suite G_n, on a toujours un sommet de B_n^k de degré k lorsque le degré maximal est k que l'on peut selectionner, ainsi, dans le pire cas on selectionne B_n en entier.
Ainsi, on obtient $OPT(G_n) = n$ et $\textsc{Glouton}(G_n) = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} - 1\right)$.
Donc $\frac{\textsc{Glouton}(G_n)}{OPT(G_n)} \geq -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + O(1)$ tend vers $+\infty$ pour n qui tend vers $+\infty$.
Ainsi, il n'est pas possible de le majorer et l'algorithme $\textsc{Glouton}$ n'est pas une c-approximation pour tout constante c.

Question III.5. On a le même invariant que dans les algorithmes précédents : G contient exactement l'ensemble des arêtes du graphe initial non recouvertes par S, car on retire les sommets de S et les arêtes ayant une extrémités dans S dans la ligne 5.
Lorsque G n'a plus d'arête, S est bien un ensemble couvrant du graphe initial.

Question III.6. On se fixe un graphe G.
Notons C l'ensemble des arêtes choisies par l'algorithme.
Lorsque $\{u, v\}$ est choisi dans G, il n'est couvert par aucun sommet dans S donc C est un couplage.
Soit S^* une couverture minimum, alors pour tout arête dans C, on a une des extrémités dans S^* donc $|S^*| \geq |C| = \frac{|S|}{2}$ car un sommet couvre au plus une arête dans C.
Enfin, on a $\frac{|S|}{|S^*|} = \frac{\textsc{Approx}(G)}{OPT(G)} \leq 2$ et ce pour tout G.
On a bien une 2-approximation.

Question III.7. On pose ici la suite $(G_n)_n$ de graphes tels que $V(G_n) = \{1, \ldots, 2n\}$ et $E(G_n) = \{\{2i + 1, 2i + 2\}, 0 \leq i < n\}$.
On a $OPT(G_n) = n$ (un sommet par arête) et $\textsc{Approx}(G) = 2n$ car on considère toutes les arêtes une par une et les extrémités n'en couvre qu'une.
Ainsi, $\frac{\textsc{Approx}(G_n)}{OPT(G_n)} = 2$ et il est impossible de majorer 2 par $c < 2$.
Une suite n'est pas nécessaire...

Partie IV

Question IV.1. On teste si tout sous-ensemble de cardinal k est une couverture : il y en a $\binom{|V(G)|}{k} \leq |V(G)|^k$ et pour tester si cela convient, on parcourt les arêtes et $|E(G)| \leq |V(G)|^2$.
Si on trouve une couverture de cardinal k, alors $\tau(G) \leq k$, on renvoie Vrai. Sinon, en particulier tout sous-ensemble de cardinal inférieur ne suffit pas et $\tau(G) > k$ et on renvoie Faux.
On a une complexité en $O\left(|V(G)|^k \times |V(G)|^2\right) = O\left(|V(G)|^{k+2}\right)$

Question IV.2. Si $\tau(G) \leq k$, alors il existe une couverture de cardinal au plus k de G. Notons X cette couverture.
Alors on a $u \in X$ ou $v \in X$.
Si $u \in X$, alors $X \setminus \{u\}$ couvre les arêtes de G qui n'ont pas u comme extrémité, soit les arêtes de $G - \{u\}$.
$|X \setminus \{u\}| \leq k - 1$ donc $\tau(G - \{u\}) \leq k - 1$.
De même, si $v \in X$, on obtient $\tau(G - \{v\}) \leq k - 1$.
Réciproquement, si $\tau(G - \{u\}) \leq k - 1$, il existe Y une couverture $G - \{u\}$ de cardinal au plus $k - 1$.
Alors $Y \cup \{u\}$ couvre les arêtes de $G - \{u\}$ et les arêtes de G d'extrémité u, soit toutes les arêtes de G donc c'est une couverture de G et $\tau(G) \leq |Y \cup \{u\}| \leq k$.
De même, si $\tau(G - \{u\}) \leq k - 1$, le cas est symétrique.

Question IV.3.

```
COUV_SEUIL(G,k) :
    ENTREE : G un graphe, k un entier
    SORTIE : Vrai si tau(G) <= k et Faux sinon
    SI k < 0 :
        RENVOYER Faux
    n = Taille de G // |V(G)|
    //RECHERCHE D'UNE ARRETE
    u = 1
    v = 2
    TANT QUE u <= n ET G[u][v] = Faux :
        SI v = n :
            u = u+1
            v = u+1
        SINON :
            v = v+1
    SI u = n+1 : // Pas d'arêtes
        RENVOYER Vrai
    SI k = 0 : // au moins une arête, pas couvrable
        RENVOYER Faux
    // APPELS RECURSIFS SUR G-{u} puis G-{v}
    VoisinsU = Vide
    POUR i = 1 à n :
        SI G[u][i] = Vrai :
            Ajouter i à VoisinsU
            G[u][i] = Faux
            G[i][u] = Faux
    SI COUV_SEUIL(G,k-1) : // G est G - {u} car on a retiré les arêtes de u
        RENVOYER Vrai
    SINON :
        POUR i DANS VoisinsU :
            G[u][i] = Vrai
            G[i][u] = Vrai
        POUR i = 1 à n :
            SI G[v][i] = Vrai :
                G[v][i] = Faux
                G[i][v] = Faux
        RENVOYER COUV_SEUIL(G,k-1) // G - {v} ici
```

A chaque appel récursif, la valeur de k diminue de 1 et on a au plus 2 appels récursifs direct. Au total, les appels récursifs forment au plus un arbre binaire complet de hauteur k donc on a au plus $2^{k+1} - 1$ appels.
Pour chaque appel, la recherche de l'arête se fait $O(|V(G)|^2)$ car `u,v` parcourent $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ au plus.
Les boules des lignes 20,28,31 sont en $O(|V(G)|)$ et permettent la suppression et l'ajout des arêtes pour que `G` correspondent à $G - \{u\}$ et $G - \{v\}$.
Au total, on a bien une complexité en $O\left((2^{k+1} - 1) \times |V(G)|^2\right)$ soit $O\left(2^k |V(G)|^2\right)$.

Question IV.4. Les graphes de degré maximum 2 sont les graphes dont les composantes connexes sont des graphes chemins et des graphes cycliques et des sommets isolés.
Un parcours de chaque composante connexe, marquant les sommets visités permets de déterminer les formes de toutes les composantes connexes.
On connaît $\tau(P_i)$ et $\tau(C_i)$ pour tout i, on additionne ces valeurs pour toutes les composantes déterminées et on vérifie si la somme dépasse k non plus.
En effet, une couverture minimum est une union de couverture minimum sur les composantes connexes du graphe.

Question IV.5. On a déjà montré que $\tau(G - \{v\}) \leq k - 1$ implique $\tau(G) \leq k$.
Supposons que $\tau(G - N[v]) \leq k - d(v)$.
Soit Y une couverture de $G - N[v]$ de cardinal $k - d(v)$.
$Y \cup N(v)$ couvre les arêtes de $G - N[v]$ et les arêtes d'extrémités dans $N(v)$ donc en particulier tous les arêtes d'extrémités v car la deuxième extrémité est toujorus dans $N(v)$.
Ainsi $Y \cup N(v)$ couvre G et $\tau(G) \leq |Y \cup N(v)| \leq k - d(v) + d(v) = k$.
On a donc le sens réciproque de l'équivalence demandée.
Supposons maintenant $\tau(G) \leq k$, soit X une couverture de G de cardinal au plus k.
$d(v) \geq 3$ donc il y a au moins 3 arête d'extrémités v pour lesquelles :

- soit $v \in X$ et $X \setminus \{v\}$ couvre $G - \{v\}$ comme dans la question IV.2, ainsi $\tau(G - \{v\}) \leq k - 1$;
- soit $N(v) \subset X$ car l'autre extrémité de chaque arête issue de v a sont autre extrémité dans X nécessairement.
  Et $X \setminus N(v)$ couvre $G - N[v]$ donc $\tau(G - N[v]) \leq |X \setminus N(v)| \leq k - d(v)$.

Question IV.6.

```
COUV_SEUIL2(i0,G,k) :
    ENTREE : G un graphe de degré au plus 2, k un entier, i0 un sommet
    SORTIE : Vrai si tau(G) <= k et Faux sinon
    // précondition : les sommets avant i0 sont de degré 1 ou 0
    n = taille de G // |V(G)|
    e = 0
    POUR i = i0 à n :
        d = 0
        POUR j = 1 à n :
            SI G[i][j] = Vrai :
                e = e +1
                d = d +1
        SI d > 1 :
            // On force i dans la couverture
            POUR j = 1 à n :
                SI G[i][j] = Vrai :
                    G[i][j] = Faux
                    G[j][i] = Faux
```

```
            RENVOYER COUV_SEUIL2(i+1,G,k-1)
    POUR i = 1 à i0-1 :
        POUR j = 1 à n :
            SI G[i][j] = Vrai :
                e = e +1
    e = e/2 // nombre d'arête
    // DEGRE 1 donc tau(G) = E(G)/2
    RENVOYER e/2 <= k

COUV_SEUIL(G,k) :
    ENTREE : G un graphe, k un entier
    SORTIE : Vrai si tau(G) <= k et Faux sinon
    n = Taille de G // V(G)
    // RECHERCHE D'UN SOMMET DE DEGRE 3 au moins
    v = 0
    d = 0
    TANT QUE d < 3 ET v < n:
        v = v+1
        d = 0
        POUR j = 1 à n :
            SI G[v][j] :
                d = d+1
    SI d < 3 : //degré au plus 2
        COUV_SEUIL2(1,G,k)
    Voisins = Vide
    POUR i = 1 à n :
        SI G[v][i] = Vrai :
            Ajouter i à Voisins
            G[v][i] = Faux
            G[i][v] = Faux
    SI COUV_SEUIl(G,k-1) : //G-{v}
        RENVOYER Vrai
    SINON :
        SI k < d :
            RENVOYER Faux
        POUR i = 1 à n :
            POUR u dans Voisins :
                G[u][i] = Faux
                G[i][u] = Faux
        RENVOYER COUV_SEUIl(G,k-d) // G-N[v]
```

La fonction `COUV_SEUL2` traite les graphes de degré au plus 2, comme on calcule le degré au plus une fois de chaque sommet (grâce au premier argument et à la précondition), on supprime un à un les sommets de degré 2 et on compte le nombre d'arêtes restantes à la valeur k restante quand le graphe est de degré 1. D'après les justifications dans I.2, on a bien les sommets de degré 2 dans la couverture dans le cas d'un chemin ou on peut décaler dans le cas d'un cycle.
Le dernier cas arrive sur un appel et est en $O(|V(G)|^2)$ à cause de la représentation en matrice d'adjacence. L'ensemble des appels récursifs précédents ont une complexité totale en $O(|V(G)|^2)$ car on ne revient pas en arrière dans les valeurs prises par `i`.
Au total, `COUV_SEUL2` est en $O(|V(G)|^2)$.
La correction de `COUV_SEUIL` découle de la question précédente, on cherche un sommet de degré 3 en $O(|V(G)|^2)$, réalise les suppressions d'arêtes en $O(|V(G)|)$ et on réalise au plus les deux

appels récursifs correspondant aux deux situations favorables.
On note $g(k)$ le nombre d'appels récursifs maximum en fonction du nombre k, g est croissante, on a $g(0) \leq g(1) \leq g(2) \leq 2$.
$g(k) \leq 1 + g(k-1) + g(k-3)$ lorsque G a un sommet de au moins 3, on a deux appels sur des graphes avec $k-1$ et $k - d(v) \leq k-3$.
Ainsi, $g(k) + 1 \leq g(k-1) + 1 + g(k-3) + 1$.
On pose $\phi(k) = \max(\frac{g(k)+1}{3}, 1)$, on a $\phi(0) = \phi(1) = \phi(2) = 1$ et $\phi(k) \leq \phi(k-1) + \phi(k-3)$.
On reconnaît la fonction f donc $\phi(k) \leq 1.4656^k$.
On a donc au plus $(3 \times 1.4656^k) - 1$ appels récursifs pour un graphe de taille n.
Au total, on a une complexité en $O(|V(G)|^2 + ((3 \times 1.4656^k) - 1) \times |V(G)|^2) = O\left(1.4656^k \times |V(G)|^2\right)$

Partie V

Question V.1. D'après la question IV.1, on peut décider si $\tau(G) \leq k$ en $O(|V(G)|^{k+2})$ pour un graphe G.
On utilise le noyau : à partir de (G, k) on calcul en $O(P(|V(G)))$ une instance (G', k') vérifiant $(i), (ii), (iii)$ et on applique l'algorithme de la question IV.1, on a un algorithme en $O(P(|V(G))+ |V(G')|^{k'+2})$.
Si G tel que $\tau(G) \leq G$, alors $k' \leq k$ et $|V(G')| \leq f(k)$ donc $|V(G')|^{k'+2} = O(f(k)^{k+2})$ et l'algorithme a une complexité en $O(P(|V(G)) + f(k)^{k+2})$.
On vérifie que l'on a bien $|V(G')| \leq f(k)$ en $O(f(k))$ et on renvoie Faux si ce n'est pas le cas, cela garantit la complexité dans tous les cas.

Question V.2. Si v est de degré 0, $G - \{v\}$ a les même arêtes que G donc toute couverture de G sans v est une couverture de $G - \{v\}$ et réciproquement.
De plus, on peut enlever v de toute couverture de G car v ne sert à couvrir aucune arête.
Ainsi,$\tau(G) = \tau(G - \{v\})$ et on a l'équivalence attendue.

Question V.3. Soit v de degré au moins $k+1$.
Si $\tau(G) \leq k$, alors X est une couverture de cardinal au plus k.
Si $v \notin X$, alors $N(v) \subset X$ et $|X| \geq d(v) > k$ impossible donc $v \in X$ et $X \setminus \{v\}$ est une couverture de $G - \{v\}$.
Ainsi, $\tau(G - \{v\}) \leq k-1$.
Réciproquement, si $\tau(G \setminus \{v\}) \leq k-1$, on a $\tau(G) \leq k$ en ajoutant v à la couverture.

Question V.4. Si on veut effectivement supprimer v, il faut copier avec un décalage la matrice d'adjacence de G : on admet que l'on ne le fait qu'une fois que l'on a repérer tous les sommets à supprimer par l'algorithme dans un tableau de booléens.
Le plus simple est de calculer tous les degrés dans un tableau et parcourir ce tableau et mettre à jour les autres degrés lorsque l'on supprime un sommet de degré $k+1$ en décrémentant pour chaque voisin de 1 en $O(|V(G)|)$.
Dans le pire des cas, on supprime un sommet par parcours et on parcours $|V(G)|$ fois les sommets.
Au total, on a un algorithme en $O(|V(G)|^2)$ ($|V(G)| \times |V(G)|$ pour mise à jour des degré, $|V(G)| \times |V(G)|$ pour le parcours, $|V(G)| \times |V(G)|$ pour le calcul des degrés et $|V(G)| \times |V(G)|$ pour la copie de la matrice décalée).

Question V.5. Dans G' les règles 1 et 2 ne peuvent s'appliquer, donc $1 \leq d(v) \leq k'$ pour tout sommet v dans G'.
Si $\tau(G') \leq k'$, alors soit X une couverture de G' de cardinal au plus k'.
Pour tout sommet dans X, on a au plus k' voisins dans X, donc au total, $|\bigcup_{u \in X} N(u)| \leq k'^2$, pour tout $v \in V(G') \setminus X$, on a $\emptyset \neq N(v) \subset X$ donc $v \in \bigcup_{u \in X} N(u)$.
Ainsi $V(G') = X \cup (\bigcup_{u \in X} N(u))$ de cardinal au plus $k' + k'^2$.

Et pour $\{u,v\} \in E(G')$, $u \in X$ ou $v \in X$ et on a au plus k' arêtes par élément de X donc $|E(G')| \leq k'^2$.

Question V.6. D'après la question V.4, l'obtention de G', k' se fait en temps polynomiale en $|V(G)|$, on a (i) grâce aux question V.2 et V.3, (iii) car les règles 1 et 2 ne font que diminuer k et (ii) d'après la question V.5 pour $f(k) = k' + k$ car $k'2 + k' \leq k^2 + k$.
Il s'agit bien d'un noyau de taille $k^2 + k$ pour le problème de l'ensemble couvrant.

Partie VI

Question VI.1.

$$OLNEEC(G) : \begin{cases} x_a + x_b \geq 1 \\ x_a + x_e \geq 1 \\ x_b + x_c \geq 1 \\ x_c + x_d \geq 1 \\ x_c + x_e \geq 1 \\ x_d + x_e \geq 1 \\ (x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) \in \{0,1\}^5 \end{cases}$$

Question VI.2.

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
  Toutes les inégalités sont respectées, c'est un ensemble couvrant fractionnaire de taille $\frac{5}{2} = 2,5$.
- $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
  $x_a + x_b \geq 1$ n'est pas respectée, on a $\frac{2}{3}$.
- $(1, 1, 0, 1, 0)$
  $x_e + x_c \geq 1$ n'est pas respectée, on a 0.
- $(1, 0, 1, 1, 0)$
  Toutes les inégalités sont respectées, c'est un ensemble couvrant fractionnaire de taille 3.

Question VI.3. Soit G un graphe. Le vecteur $(x_v)_{v \in V(G)}$ tel que $x_v = \frac{1}{2}$ est tel que pour tout $\{u,v\} \in E(G), x_u + x_v = 1$ donc il vérifie le système $OLEC(G)$: c'est un ensemble couvrant fractionnaire de taille $\frac{|V(G)|}{2}$ donc $\tau_f(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$.
Pour la suite de graphe $(K_n)_n$, on a $\tau(K_n) - \tau_f(K_n) \geq n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$ d'après I.2 et ce qui précède.
Or $\frac{n}{2} - 1$ tend vers $+\infty$ donc la quantité $\tau(G) - \tau_f(G)$ ne peut être majorée par une constante A pour tout graphe.

Question VI.4. Supposons par l'absurde qu'il existe $\{u,v\} \in E(G)$ tel que $u \in V_0$ et $v \in V_0$. Alors on a $x_u + x_v < 1$ et l'inégalité $x_u + x_v \geq 1$ n'est pas vérifiée : ABSURDE.
Ainsi, V_0 est un ensemble indépendant.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\{u,v\} \in E(G)$ tel que $u \in V_0$ et $v \in V_{\frac{1}{2}}$. Alors on a $x_u + x_v < 1$ et l'inégalité $x_u + x_v \geq 1$ n'est pas vérifiée : ABSURDE.

Question VI.5. Pour chaque arête, d'après la question précédente, au moins une des extrémités est dans $V_1 \cup V_{\frac{1}{2}}$ (car V_0 ensemble indépendant), donc il s'agit bien d'un ensemble couvrant de G.
D'une part, on a $\tau_f(G) \leq \tau(G)$ car tout ensemble couvrant est en particulier un ensemble couvrant fractionnaire avec des coefficients égaux à 1 et 0.
D'autre part, $|V_{\frac{1}{2}} \cup V_1| = \sum_{v \in V_{\frac{1}{2}} \cup V_1} 1 \leq \sum_{v \in V_{\frac{1}{2}} \cup V_1} 2x_v = 2\tau_f(G)$.
Ainsi, on a bien $|V_{\frac{1}{2}} \cup V_1| \leq 2\tau(G)$.

Pour un graphe G, on calcul en temps polynomiale un ensemble couvrant minimum, puis $V_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ en $O(|V(G)|)$ par un parcours des sommets et des coefficients. On obtient un ensemble couvrant C tel que $\frac{|C|}{\tau(G)} \leq 2$, c'est donc une 2-approximation et l'algorithme est bien polynomial.

Question VI.6. Supposons par l'absurde qu'il existe $\{u, v\} \in E(G)$ tel que $u \notin S$ et $v \notin S$, alors :

- soit $u \in V_0$, dans ce cas $v \notin V_0$ par la question VI.4 donc $v \in V_{\frac{1}{2}}$ et $v \notin S^*$ car $v \notin S$.
  Or par la question VI.4, on a aucune arête entre V_0 et $V_{\frac{1}{2}}$, donc ce cas est impossible.
- soit $u \in V_{\frac{1}{2}}$ et $u \notin S^*$, $v \in V_0$ impossible par la question VI.4, donc $v \in V_{\frac{1}{2}}$ et $v \notin S^*$.
  Or S^* est une couverture donc $u \in S^*$ ou $v \in S^*$. Ce cas est également impossible.

Ainsi, toutes les arêtes sont couvertes : S est un ensemble couvrant.

Question VI.7. Si $\varepsilon = 0$, on a $(x_v) = (y_v)$ et le résultats est vrai.
Montrons que pour tout $\{u, v\} \in E(G)$, on a $y_u + y_v \geq 1$ dans le cas $\varepsilon > 0$..

- Pour tout u, v qui ne sont ni dans $V_0 \cap S^*$, ni dans $V_1 \setminus S^*$, on a $y_u + y_v = x_u + x_v \geq 1$.
- Si $u \in V_0 \cap S^*$ et v ni dans $V_0 \cap S^*$, ni dans $V_1 \setminus S^*$, $y_u + y_v = x_u + \varepsilon + x_v \geq 1$.
  Idem en échangeant les rôles de u et v.
- Si $u \in V_0 \cap S^*$ et $v \in V_1 \setminus S^*$, $y_u + y_v = x_u + \varepsilon + x_v - \varepsilon \geq 1$.
  Idem en échangeant les rôles de u et v.
- $u \in V_0 \cap S^*$ et $v \in V_0 \cap S^*$ impossible d'après VI.4.
- Si $u \in V_1 \setminus S^*$ et v ni dans $V_0 \cap S^*$, ni dans $V_1 \setminus S^*$, $y_u + y_v = x_u - \varepsilon + x_v$.
  Or $u \notin S^*$ donne $v \in S^*$, donc $v \notin V_0$ et $x_v \geq \frac{1}{2}$.
  Ainsi, il suffit de vérifier que $x_u \geq \varepsilon + \frac{1}{2}$, soit $x_u - \frac{1}{2} = \left|x_u - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon$, ce qui est vrai pas définition de ε comme un minimum.
  Idem en échangeant les rôles de u et v.
- $u \in V_1 \setminus S^*$ et $v \in V_1 \setminus S^*$ est impossible car S^* couvre $\{u, v\}$.

Ainsi, $(y_v)_{v \in V(G)}$ est bien un ensemble couvrant fractionnaire.

Question VI.8. Comme (x_v) est un ensemble couvrant fractionnaire minimum et (y_v) un ensemble couvrant fractionnaire, on a $\sum_{v \in V(G)} x_v \leq \sum_{v \in V(G)} x_v$ donc $0 \leq |V_0 \cap S^*|\varepsilon - |V_1 \setminus S^*|\varepsilon$.
Ainsi, on a $|V_1 \setminus S^*| \leq |V_0 \cap S^*|$ (si $\varepsilon = 0$, les ensembles sont vides donc le résultat reste vrai).
$|S| = |V_1| + |V_{\frac{1}{2}} \cap S^*| = |V_1 \cap S^*| + |V_1 \setminus S^*| + |V_{\frac{1}{2}} \cap S^*| \leq |V_1 \cap S^*| + |V_0 \cap S^*| + |V_{\frac{1}{2}} \cap S^*| = |S^*|$ car on a une partition de $V(G)$.
Donc S est un ensemble couvrant (VI.6) minimum par égalité des cardinaux.

Question VI.9. Si l'algorithme renvoie NON dans la ligne 3, on a $\tau_f(G) > k$. Or $\tau(G) \geq \tau_f(G)$ (justification donnée en VI.5) donc $\tau(G) > k$. La somme comparée à k est la taille de la couverture fractionnaire minimum calculée.
Si l'algorithme renvoie NON dans la ligne 4, on a $\left|V_{\frac{1}{2}}\right| > 2k$, on a $\tau(G) \geq \tau_f(G) \geq \left|V_{\frac{1}{2}}\right| \times \frac{1}{2} > 2k \times \frac{1}{2} = k$ (en particulier, l'algorithme a déjà renvoyé NON ligne 3...).

Question VI.10. Si $\tau(G) \leq k$, soit S^* une couverture minimum de cardinal au plus k. D'après la question VI.6, $(V_{\frac{1}{2}} \cap S^*) \cup V_1$ est une couverture minimum de cardinal au plus k.
Les arêtes de $G - V_0 - V_1$ ont leurs deux extrémités dans $V_{\frac{1}{2}}$ dont sont couvertes par l'ensemble $\left((V_{\frac{1}{2}} \cap S^*) \cup V_1\right) \cap V_{\frac{1}{2}} = (V_{\frac{1}{2}} \cap S^*)$.
Ainsi, $(V_{\frac{1}{2}} \cap S^*)$ est une couverture de $G - V_0 - V_1$ donc
$\tau(G - V_0 - V_1) \leq \left|V_{\frac{1}{2}} \cap S^*\right| \leq |(V_{\frac{1}{2}} \cap S^*) \cup V_1| - |V_1| \leq k - |V_1|$.

Réciproquement, si $\tau(G - V_0 - V_1) \leq k - |V_1|$, soit X un ensemble couvrant minimum de $G - V_0 - V_1$.
Montrons que $X \cup V_1$ est un ensemble couvrant de G. Soit $\{u, v\} \in E(G)$:

— si $u \in V_{\frac{1}{2}}$ et $v \in V_{\frac{1}{2}}$, alors X couvre l'arête car X couvre $G - V_0 - V_1$;

— si $u \in V_1$ ou $v \in V_1$, $X \cup V_1$ couvre bien l'arête car $V_1 \subset X \cup V_1$;

— $u \in V_0$ et $v \in V_0$ impossible d'après VI.4 ;

— $u \in V_0$ et $v \in V_{\frac{1}{2}}$ impossible d'après VI.4 ;

— $v \in V_0$ et $u \in V_{\frac{1}{2}}$ impossible d'après VI.4.

Ainsi, $X \cup V_1$ est bien une couverture de G et $\tau(G) \leq |X \cup V_1| \leq k - |V_1| + |V_1| = k$.
La construction de $(G - V_0 - V_1, k - |V_1|)$ se fait en temps polynomiale à partir de (G, k) et :

(*i*) $\tau(G) \leq k$ si et seulement si $\tau(G - V_1 - V_0) \leq k - |V_1|$: c'est ce que l'on vient de démontré ;

(*ii*) si $\tau(G) \leq k$, alors $|V(G - V_1 - V_0)| = |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$: on a montré la contraposé en VI.9 ;

(*iii*) $k - |V_1| \leq k$.

Ainsi, il s'agit d'un noyau pour le problème de l'ensemble couvrant de taille $2k$.