

A 1) Tr est visiblement une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers \mathbf{R} .

$$\text{De plus : } \forall (\alpha, \beta, A, B) \in \mathbf{R}^2 \times [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 \quad Tr(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^n b_{ii} = \alpha Tr A + \beta Tr B$$

Donc : Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

A 2) • On a : $Tr(I_n \times I_n) = Tr I_n = n$ et $(Tr I_n) \times (Tr I_n) = n^2$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\} \quad \exists (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 / Tr(AB) \neq (Tr A) \times (Tr B)$$

$$\text{Par contre, visiblement : } \forall (A, B) \in [\mathcal{M}_1(\mathbf{R})]^2 \quad Tr(AB) = AB = (Tr A) \times (Tr B)$$

$$\bullet \text{ On a : } \forall (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 \quad Tr(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ik} b_{ki}$$

$$\text{Donc } A \text{ et } B \text{ jouent le même rôle, donc : } \forall (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 \quad Tr(AB) = Tr(BA)$$

A 3) Donc : $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times GL_n(\mathbf{R}) \quad Tr(P^{-1}AP) = Tr[P^{-1}(AP)] = Tr[(AP)P^{-1}] = Tr[A(PP^{-1})] = Tr A$

A 4) • A et B sont semblables, soit donc P , élément de $GL_n(\mathbf{R})$, tel que : $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad det(B - \lambda I_n) &= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = det[P^{-1}(A - \lambda I_n)P] = det(P^{-1}) \times det(A - \lambda I_n) \times det P \\ &= \frac{1}{det P} \times det(A - \lambda I_n) \times det P = det(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Donc deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

• En développant par rapport à sa première colonne le déterminant qui définit $P_A(X)$, puis en recommençant avec chaque déterminant obtenu jusqu'à avoir seulement des déterminants d'ordre 1, on voit que les termes en X^{n-1} de $P_A(X)$ viennent exclusivement de $\prod_{i=1}^n (a_{ii} - X)$.

Donc $(-1)^{n-1} Tr A$ est le coefficient de X^{n-1} dans $P_A(X)$.

• A et B sont deux matrices semblables, donc elles ont même polynôme caractéristique, donc, d'après l'alinéa ci-dessus : $(-1)^{n-1} Tr A = (-1)^{n-1} Tr B$ donc $Tr A = Tr B$.

On retrouve ainsi que deux matrices semblables ont même trace.

A 5) D'après 1) et 2), on a : $\forall (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 \quad Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = Tr(AB) - Tr(AB) = 0$

$$\text{Or : } Tr(2I_n) = 2 \times Tr I_n = 2n$$

$$\text{Donc : } \forall (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbf{R})]^2 \quad AB - BA \neq 2I_n$$

A 6) Vu la définition de Tr , il est clair que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad Tr^t A = Tr A$.

$$\text{Donc : } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad Tr A = Tr^t A = Tr(-A) = -Tr A \quad \text{donc } Tr A = 0.$$

B1) * Visiblement $\langle | \rangle$ est une application de $[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})]^2$ vers \mathbb{R} .

De plus : • $\forall (A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbb{R})]^2 \quad \langle A|B \rangle = Tr({}^tAB) = Tr[{}^t({}^tAB)] = Tr({}^tBA) = \langle B|A \rangle$

• $\forall (\alpha, \alpha', A, A', B) \in \mathbb{R}^2 \times [\mathcal{M}_n(\mathbb{R})]^3 \quad \langle \alpha A + \alpha' A'|B \rangle = Tr[{}^t(\alpha A + \alpha' A')B] = Tr[(\alpha {}^tA + \alpha' {}^tA')B]$
 $= Tr[\alpha {}^tAB + \alpha' {}^tA'B] = \alpha Tr({}^tAB) + \alpha' Tr({}^tA'B)$
 $= \alpha \langle A|B \rangle + \alpha' \langle A'|B \rangle$

• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \langle A|A \rangle = \sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ik}^2$ (cf. A 2) donc : $\langle A|A \rangle \geq 0$

et aussi : $\langle A|A \rangle = 0 \iff (\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ik} = 0) \iff A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

La symétrie dispense de vérifier la linéarité à droite, nous pouvons donc conclure que $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Autrement dit : $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* On a vu au passage : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \|A\|^2 = \langle A|A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

B2) • Posons : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(A) = A - {}^tA$ et $\psi(A) = A + {}^tA$.

La linéarité de la transposition permet de conclure immédiatement à la linéarité des applications φ et ψ .

De plus : $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = {}^tA\} = Ker \varphi$ et $A_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = -{}^tA\} = Ker \psi$.

Donc $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• On a : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} A = {}^tA \\ A = -{}^tA \end{cases} \implies A = -A \implies A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Donc : $\underline{S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}}$ ($0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ appartient à tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!)

• De plus : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$
 or : $\frac{{}^t(A + {}^tA)}{2} = \frac{{}^tA + A}{2} = \frac{A + {}^tA}{2}$ donc $\frac{A + {}^tA}{2} \in S_n(\mathbb{R})$
 $\frac{{}^t(A - {}^tA)}{2} = \frac{{}^tA - A}{2} = -\frac{A - {}^tA}{2}$ donc $\frac{A - {}^tA}{2} \in A_n(\mathbb{R})$

Donc, en regroupant : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})}$

B3) On a : $\langle S|A \rangle = Tr({}^tSA) = Tr(SA) = Tr(AS) = Tr[{}^t(AS)] = Tr({}^tS{}^tA) = Tr[{}^tS(-A)] = Tr[-({}^tSA)]$
 $= -Tr({}^tSA) = -\langle S|A \rangle$

Donc : $\underline{\forall (S, A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R}) \quad \langle S|A \rangle = 0}$.

Donc : $A_n(\mathbb{R}) \subset [S_n(\mathbb{R})]^\perp$

Or : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc : $dim A_n(\mathbb{R}) = dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - dim S_n(\mathbb{R}) = dim ([S_n(\mathbb{R})]^\perp)$

L'inclusion et l'égalité des dimensions nous permettent d'affirmer : $\underline{A_n(\mathbb{R}) = [S_n(\mathbb{R})]^\perp}$

B4) • On a : $\forall M \in S_n(\mathbb{R}) \quad \|A - M\|^2 = \|A' + A'' - M\|^2 = \|A'' + (A' - M)\|^2$
or : $A'' \in A_n(\mathbb{R}), A' - M \in S_n(\mathbb{R}), A_n(\mathbb{R}) = [S_n(\mathbb{R})]^\perp$
Donc, d'après le théorème de Pythagore : $\forall M \in S_n(\mathbb{R}) \quad \|A - M\|^2 = \|A''\|^2 + \|A' - M\|^2 \geq \|A''\|^2 = \|A - A'\|^2$

• D'après B1) : $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2$
Or $A' \in S_n(\mathbb{R})$ donc $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 \leq \|A - A'\|^2$ et, d'après le 1^{er} alinéa $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 \geq \|A - A'\|^2$
Donc : $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 = \|A - A'\|^2$
Par ailleurs, on a vu en B2) : $A' = \frac{A + {}^tA}{2}$ donc $A - A' = \frac{A - {}^tA}{2}$
Donc, en regroupant : $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \left\| \frac{A - {}^tA}{2} \right\|^2$

B5) On a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (1-x)^2 + (4-z)^2 + 13 - 10y + 2y^2 = (1-x)^2 + (4-z)^2 + 2\left[y^2 - 5y + \frac{13}{2}\right]$
 $= (1-x)^2 + (4-z)^2 + 2\left[\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{13}{2}\right] = (1-x)^2 + (4-z)^2 + 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
Donc : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \left(1, \frac{5}{2}, 4\right) \right\} \quad f(x, y, z) > \frac{1}{2} = f\left(1, \frac{5}{2}, 4\right)$

(on aurait pu traiter cette question comme une conséquence de B4))

B6) On a : $\|AC - CB\|^2 = \text{Tr} [{}^t(AC - CB)(AC - CB)] = \text{Tr} [({}^tC{}^tA - {}^tB{}^tC)(AC - CB)]$
 $= \text{Tr} [{}^tC{}^tAAC - {}^tC{}^tACB - {}^tB{}^tCAC + {}^tB{}^tCCB]$
 $= \text{Tr} ({}^tC{}^tAAC) - \text{Tr} ({}^tC{}^tACB) - \text{Tr} ({}^tB{}^tCAC) + \text{Tr} ({}^tB{}^tCCB)$
De même : $\|{}^tAC - C{}^tB\|^2 = \text{Tr} ({}^tCA{}^tAC) - \text{Tr} ({}^tCAC{}^tB) - \text{Tr} (B{}^tC{}^tAC) + \text{Tr} (B{}^tCC{}^tB)$
Or : $\text{Tr} ({}^tCA{}^tAC) = \text{Tr} ({}^tC{}^tAAC)$ car ${}^tAA = A{}^tA$
 $\text{Tr} ({}^tCAC{}^tB) = \text{Tr} [({}^tCAC){}^tB] = \text{Tr} ({}^tB{}^tCAC)$ et $\text{Tr} (B{}^tC{}^tAC) = \text{Tr} [B({}^tC{}^tAC)] = \text{Tr} ({}^tC{}^tACB)$ d'après A2)
 $\text{Tr} (B{}^tCC{}^tB) = \text{Tr} [(B{}^tC)(C{}^tB)] = \text{Tr} (C{}^tBB{}^tC) = \text{Tr} (CB{}^tB{}^tC) = \text{Tr} [(CB)({}^tB{}^tC)] = \text{Tr} ({}^tB{}^tCCB)$
On a utilisé A2), puis ${}^tBB = B{}^tB$, puis à nouveau A2).

Donc : $\|AC - CB\|^2 - \|{}^tAC - C{}^tB\|^2 = 0$

B6) Donc : $AC = CB \iff AC - CB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff \|AC - CB\| = 0 \iff \|AC - CB\|^2 = 0$
 $\iff \|{}^tAC - C{}^tB\|^2 = 0 \iff \|{}^tAC - C{}^tB\| = 0 \iff {}^tAC - C{}^tB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Donc : $AC = CB \iff {}^tAC = C{}^tB$

C1) Toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est diagonale et symétrique, de plus la multiplication est commutative dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Donc : $\forall (S, S') \in [\mathcal{M}_1(\mathbb{R})]^2 \quad SS' = S'S$ et $I_1^{-1}SI_1$ et $I_1^{-1}S'I_1$ sont diagonales, et enfin $I_1 \in \mathcal{O}_1(\mathbb{R})$.

En d'autres termes, A(1) est trivialement vérifiée.

C2.1) Si S_1, \dots, S_p sont toutes diagonales alors : $\forall i \in [1, p] \quad I_n^{-1}S_iI_n$ est diagonale et $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

C 2.2) Munissons \mathbf{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

S_1 est une matrice symétrique réelle, soit donc (V_1, \dots, V_n) une base orthonormale de \mathbf{R}^n formée de vecteurs propres de S_1 et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes.

Nommons r l'ordre de multiplicité de λ_1 , à priori on a : $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

S_1 étant diagonalisable r est aussi $\dim \text{Ker}(S_1 - \lambda_1 I_n)$.

S_1 n'est pas diagonale donc $S_1 - \lambda_1 I_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$ donc $\text{rg}(S_1 - \lambda_1 I_n) > 0$

donc $\dim \text{Ker}(S_1 - \lambda_1 I_n) = n - \text{rg}(S_1 - \lambda_1 I_n) < n$ donc $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

S_1 est diagonalisable, r est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_1 et (V_1, \dots, V_n) est une base de \mathbf{R}^n formée de vecteurs propres de S_1 , donc, parmi les V_i , il y a exactement r vecteurs dont la valeur propre est λ_1 ; quitte à permuter les V_i imposons donc : $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_r$ et $\forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket \lambda_i \neq \lambda_1 = \lambda$.

Soit Ω_1 la matrice de passage de la base canonique de \mathbf{R}^n à (V_1, \dots, V_n) .

Alors : $\Omega_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ car les deux bases en question sont orthonormales,

$$\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_r & (0) \\ (0) & \Delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc : si S_1 appartient à $S_n(\mathbf{R})$ et si S_1 n'est pas diagonale, alors :

$$\left. \begin{array}{l} \exists (r, \lambda, \Delta, \Omega_1) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \\ \Delta \text{ est une matrice diagonale d'ordre } n-r, \\ \lambda \text{ ne figure pas sur la diagonale de } \Delta. \end{array} \right/ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq n \text{ et } \Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{pmatrix} \lambda I_r & (0) \\ (0) & \Delta \end{pmatrix} \end{array}$$

C 2.3) Ω_1 appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ donc : $\Omega_1^{-1} = {}^t \Omega_1$.

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad {}^t(\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) = {}^t({}^t \Omega_1 S_i \Omega_1) = {}^t \Omega_1 {}^t S_i \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1$ car S_i est symétrique.

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t A_i & {}^t D_i \\ {}^t B_i & {}^t C_i \end{pmatrix}$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad A_i = {}^t A_i, \quad C_i = {}^t C_i, \quad D_i = {}^t B_i.$

C 2.4) • On a : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad S_1 S_i = S_i S_1 \iff \Omega_1^{-1} S_1 S_i \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_i S_1 \Omega_1 \iff (\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) = (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1)$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda I_r & (0) \\ (0) & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_r & (0) \\ (0) & \Delta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda A_i & \lambda B_i \\ \Delta D_i & \Delta C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_i & B_i \Delta \\ \lambda D_i & C_i \Delta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda B_i = B_i \Delta \\ \lambda D_i = \Delta D_i \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases}$$

Or : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda B_i = B_i \Delta \implies {}^t(\lambda B_i) = {}^t(B_i \Delta) \implies \lambda {}^t B_i = {}^t \Delta {}^t B_i \implies \lambda D_i = \Delta D_i$
car, d'après C 2.3) $D_i = {}^t B_i$ et, d'après C 2.2), Δ est diagonale donc ${}^t \Delta = \Delta$.

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad S_1 S_i = S_i S_1 \iff \begin{cases} \lambda B_i = B_i \Delta \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases}$

• Soit i fixé dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Par hypothèse $S_1 S_i = S_i S_1$ donc, d'après le premier alinéa $\lambda B_i = B_i \Delta$.

Soit (k, l) fixé dans $\llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, n - r \rrbracket$, appelons b_{kl} le terme de ligne k colonne l de B_i et posons $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} & \dots & (0) \\ (0) & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Les termes de ligne k colonne l de λB_i et $B_i \Delta$ sont respectivement λb_{kl} et $b_{kl} \lambda_{r+l}$ car le $l^{\text{ème}}$ terme de la $k^{\text{ème}}$ ligne de B_i est b_{kl} et tous les termes de la $l^{\text{ème}}$ colonne de Δ sont nuls sauf le $l^{\text{ème}}$ qui vaut λ_{r+l} .

Donc $\lambda b_{kl} = b_{kl} \lambda_{r+l}$ donc $(\lambda - \lambda_{r+l}) b_{kl} = 0$ donc $b_{kl} = 0$ (d'après C 2.2), λ ne figure pas sur la diagonale de Δ).

Donc : $\forall (k, l) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, n - r \rrbracket \quad b_{kl} = 0$ donc $B_i = 0_{\mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbf{R})}$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad B_i = 0_{\mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbf{R})}$ et $D_i = {}^t B_i = 0_{\mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbf{R})}$

C 2.5) Donc : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$

$$S_i S_j = S_j S_i \iff \Omega_1^{-1} S_i S_j \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_j S_i \Omega_1 \iff (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_j \Omega_1) = (\Omega_1^{-1} S_j \Omega_1) (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j & (0) \\ (0) & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & (0) \\ (0) & C_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A_i A_j & (0) \\ (0) & C_i C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j A_i & (0) \\ (0) & C_j C_i \end{pmatrix} \quad \text{cf. C 2.4)}$$

Donc : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad S_i S_j = S_j S_i \iff \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$

C 2.6) D'après C 2.3), $\{A_1, \dots, A_p\} \subset S_r(\mathbf{R})$ et $\{C_1, \dots, C_p\} \subset S_{n-r}(\mathbf{R})$.

D'après C 2.2) : $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ donc $n-r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Par hypothèse $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ $S_i S_j = S_j S_i$ donc, d'après C 2.5), $A_i A_j = A_j A_i$ et $C_i C_j = C_j C_i$.

Donc, puisque nous avons supposé la propriété vraie du rang 1 au rang $n-1$, nous pouvons choisir Ω' dans $\mathcal{O}_r(\mathbf{R})$ et Ω'' dans $\mathcal{O}_{n-r}(\mathbf{R})$ telles que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $\Omega'^{-1} A_i \Omega'$ et $\Omega''^{-1} C_i \Omega''$ soient diagonales.

Alors :
$$\begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \Omega'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix} = I_n \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix}^{-1}$$

Donc :
$$\begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} \Omega_1^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix}^{-1} \Omega_1^{-1} = \left[\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\begin{aligned} \left[\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \right]^{-1} S_i \left[\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} (\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1) \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} A_i & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} A_i \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} C_i \Omega'' \end{pmatrix} \quad \text{cette matrice est diagonale car } \Omega'^{-1} A_i \Omega' \\ &\quad \text{et } \Omega''^{-1} C_i \Omega'' \text{ le sont.} \end{aligned}$$

De plus :
$${}^t \left[\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \right] = {}^t \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} {}^t \Omega_1 = \begin{pmatrix} {}^t \Omega' & (0) \\ (0) & {}^t \Omega'' \end{pmatrix} {}^t \Omega_1 = \begin{pmatrix} \Omega'^{-1} & (0) \\ (0) & \Omega''^{-1} \end{pmatrix} \Omega_1^{-1} = \left[\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

(on a utilisé le fait que Ω_1 , Ω' et Ω'' soient orthogonales)

donc $\Omega_1 \begin{pmatrix} \Omega' & (0) \\ (0) & \Omega'' \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Donc : $\exists \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) / \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $\Omega^{-1} S_i \Omega$ soit diagonale.

Récapitulons : • la propriété A(1) est vraie,

• nous avons prouvé : $\forall n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ (A(1), A(2), ..., A(n-1) sont vraies) \implies (A(n) est vraie)

Nous pouvons donc conclure : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ A(n) est vraie.

C 3.1) • Tout d'abord, d'évidence, $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ sont des matrices réelles carrées d'ordre 2 symétriques.

Posons : $A' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $A_1 = \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{4}A'$, $A_2 = \frac{5}{4}I_2 + \frac{1}{4}A'$, $A_3 = 0I_2 + 0A'$, $C_1 = \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}C'$, $C_2 = \frac{3}{2}I_2 + \frac{1}{2}C'$, $C_3 = \frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}C'$
Donc A_1, A_2 et A_3 sont des combinaisons linéaires de I_2 et A' qui commutent, et, de même, C_1, C_2 et C_3 sont des combinaisons linéaires de I_2 et C' qui commutent.

Donc A_1, A_2, A_3 commutent deux à deux et C_1, C_2, C_3 commutent deux à deux.

Donc $\{A_1, A_2, A_3\}$ et $\{C_1, C_2, C_3\}$ vérifient l'hypothèse figurant dans A(2).

• De plus : $\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \det(A' - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$

Et : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad A' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y\sqrt{3} = -x \\ x\sqrt{3} + 2y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y\sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{3} + 3y = 0 \end{cases} \iff x = -y\sqrt{3}$

Donc $A' \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A' \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ on a utilisé l'orthogonalité des sous-espaces propres de A'

Posons donc : $\Omega_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ alors $\Omega_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ et $\Omega_2^{-1}A'\Omega_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : $\Omega_2^{-1}A_1\Omega_2 = \Omega_2^{-1}(\frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{4}A')\Omega_2 = \frac{1}{4} \left[I_2 + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Omega_2^{-1}A_2\Omega_2 = \Omega_2^{-1}(\frac{5}{4}I_2 + \frac{1}{4}A')\Omega_2 = \frac{1}{4} \left[5I_2 + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 et, bien sûr : $\Omega_2^{-1}A_3\Omega_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})}$

C 3.1) • Enfin : $C' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posons donc : $\Omega'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\Omega'_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ et $\Omega'^{-1}_2 C' \Omega'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : $\Omega'^{-1}_2 C_1 \Omega'_2 = \Omega'^{-1}_2 (\frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}C') \Omega'_2 = \frac{1}{2} \left[I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Omega'^{-1}_2 C_2 \Omega'_2 = \Omega'^{-1}_2 (\frac{3}{2}I_2 + \frac{1}{2}C') \Omega'_2 = \frac{1}{2} \left[3I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\Omega'^{-1}_2 C_3 \Omega'_2 = \Omega'^{-1}_2 (\frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}C') \Omega'_2 = \frac{1}{2} \left[3I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

C 3.2) Posons : $U_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après C 3.1), on a : $A_1U_1 = U_1$, $A_1U_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, $A_2U_1 = 2U_1$, $A_2U_2 = U_2$,
 $C_1U_3 = U_3$, $C_1U_4 = 0_{\mathbb{R}^2}$, $C_2U_3 = 2U_3$, $C_2U_4 = U_4$, $C_3U_3 = U_3$, $C_3U_4 = 2U_4$

Posons : $V_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Visiblement, (V_1, V_2, V_3, V_4) est une famille orthonormale de \mathbb{R}^4 , donc (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base orthonormale de \mathbb{R}^4 .

De plus : $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $S_i V_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $S_1 V_1 = V_1$, $S_2 V_1 = 2V_1$, $S_3 V_1 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$S_i V_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i U_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $S_1 V_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$, $S_2 V_2 = V_2$, $S_3 V_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$S_i V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_i U_3 \\ C_i U_3 \end{pmatrix}$ donc $S_1 V_3 = V_3$, $S_2 V_3 = 2V_3$, $S_3 V_3 = V_3$

$S_i V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_i & (0) \\ (0) & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_i U_4 \\ -C_i U_4 \end{pmatrix}$ donc $S_1 V_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$, $S_2 V_4 = V_4$, $S_3 V_4 = 2V_4$