ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES.

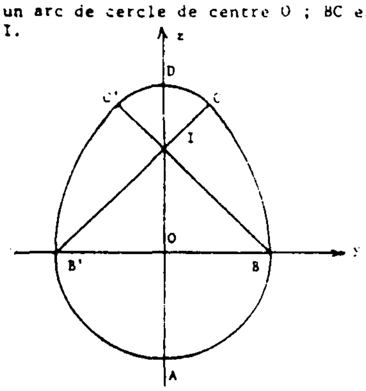
L'espace est l'espace euclidien à trois dimensions, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; les axes sont notés Ox, Oy, Oz

PARTIE A

Un corps de révolution autour de Oz a la forme d'un oeuf ; sa section par le plan méridien yOz est le domaine limité par le contour ABCDC'B'A de la figure : les points utilisés ont pour coordonnées :

$A\left|\begin{array}{l}0\\-1\end{array}\right.$ $\quad B\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.$ $\quad C\left|\begin{array}{l}\sqrt{2}-1\\\sqrt{2}\end{array}\right.$ $\quad D\left|\begin{array}{l}0\\3-\sqrt{2}\end{array}\right.$ $\quad C'\left|\begin{array}{l}-\sqrt{2}+1\\\sqrt{2}\end{array}\right.$ $\quad B'\left|\begin{array}{l}-1\\0\end{array}\right.$ $\quad I\left|\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$

AB est un arc de cercle de centre O ; BC est un arc de cercle de centre B' ; CDC' est un arc de cercle de centre I.



1°) Exprimer, en fonction de π et de $\sqrt{2}$, la longueur L du contour ABCDC'B'A ; en donner une valeur approchée à 10^{-5} près.

2°) Exprimer, en fonction de π et de $\sqrt{2}$ l'aire S du domaine limité par le contour précédent ; en donner une valeur approchée à 10^{-5} près.

3°) Soit R le rayon du cercle de longueur L ; soit R_o le rayon du disque d'aire S ; calculer à 10^{-5} près, R et R_o ainsi que le rapport $\frac{R}{R_o}$;

PARTIE B

On rappelle que si $\mathcal{A}$ est l'aire de la "zone de révolution" engendrée par un arc PQ du demi-plan $(x = 0, y \geq 0)$ en tournant autour de Oz, on a $\mathcal{A} = \int_{PQ} 2\pi\, y\, ds$; $ds = \sqrt{dy^2 + dz^2}$ étant l'élément d'arc.

On rappelle aussi que si V est le volume du corps engendré par un domaine Δ du demi-plan $(x = 0, y \geq 0)$ en tournant autour de Oz, on a :

$$V = \iint_{\Delta} 2\pi\, y\, dy\, dz = \int_{\Gamma} -\pi y^2\, dz\,,$$ Γ étant la courbe fermée, orientée dans le sens direct, qui limite Δ.

1°) R et α étant deux réels vérifiant les inégalités $R \geq 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, soit $V(R, \alpha)$ le volume du corps (dit "secteur sphérique") défini par les inégalités $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha$.
Calculer $V(R, \alpha)$.

2°) Vérifier le résultat obtenu :

. en faisant tendre α vers 0.

. en calculant la partie principale de $V(R, \alpha)$ lorsque α tend vers $\frac{\pi}{2}$ et en comparant $V(R, \alpha)$ aux volumes des deux cônes C_1 et C_2 définis respectivement par les inégalités :

(C_1) $\quad \sqrt{x^2 + y^2}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha \leq z \leq R$

(C_2) $\quad \sqrt{x^2 + y^2}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha \leq z \leq R \sin \alpha$.

PARTIE C

1°) Le corps solide décrit dans la partie A (oeuf) a une aire extérieure Σ dont on demande une expression en fonction de π et de $\sqrt{2}$, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-5} près.

2°) Le même corps solide a un volume V dont on demande une expression en fonction de π et de $\sqrt{2}$, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-5} près.

3°) Soit ρ le rayon de la sphère ayant pour surface Σ ; soit ρ_0 le rayon de la boule ayant pour volume V ; calculer à 10^{-5} près, des valeurs approchées de ρ, de ρ_0, et du rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$.