

# CORRIGÉ

## Problème 1

1. — Lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $e^{-t}$  tend vers  $0^+$  et  $1+t^2$  tend vers  $+\infty$ , donc  $f(t)$  tend vers  $0^+$ .
2. —  $C_f$  présente une asymptote d'équation  $y = 0$ ; comme  $f(t) > 0$  pour tout réel  $t$ , la courbe est entièrement au-dessus de cette asymptote.

3. —  $f(t)$  est négligeable devant  $e^t$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  car  $\frac{f(t)}{e^t} = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

$f(t)$  est négligeable devant  $\frac{e^t}{t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  car  $\frac{f(t)}{e^t/t} = \frac{t}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{t^2}$  car  $\frac{f(t)}{e^t/t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ .

4. — Par raison de croissances comparées,  $\frac{e^t}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ . Le troisième résultat de la question 3 montre que  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ .

5. —  $f'(t) = \frac{(1+t^2)e^t - 2te^t}{(1+t^2)^2} = \frac{(t^2 - 2t + 1)e^t}{(1+t^2)^2} = \frac{(t-1)^2 e^t}{(1+t^2)^2}$ .

6. — Il est clair que  $f'(t) \geq 0$  pour tout réel  $t$ , l'inégalité étant stricte sauf pour  $t = 1$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Avec les résultats des questions 1 et 4, on peut dresser le tableau de variation ci-contre.

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f(t)$	$0^+$	$+\infty$
	$\nearrow$	

7. — Notons  $u(t) = (t-1)^2 e^t$  et  $v(t) = 1+t^2$ . Alors  $f' = \frac{u}{v^2}$ , donc :  $f'' = \frac{v^2 u' - 2v v' u}{v^4} = \frac{v u' - 2v' u}{v^3}$ .  
Or  $u'(t) = 2(t-1)e^t + (t-1)^2 e^t = (t^2 - 1)e^t$  et  $v'(t) = 2t$ ; nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{(1+t^2)(t^2-1)e^t - 4t(t-1)^2 e^t}{(1+t^2)^3} = \frac{(t^3 + t^2 + t + 1 - 4t^2 + 4t)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3} \\ &= \frac{(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

8. — La solution évidente est  $t_1 = 1$ . Observons les variations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\psi : t \mapsto t^3 - 3t^2 + 5t + 1$ . Nous avons  $\psi'(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 > 0$ , donc  $\psi$  est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$  sur  $] \lim_{-\infty} \psi, \lim_{+\infty} \psi [ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $\psi$  s'annule une fois et une seule sur  $\mathbb{R}$ ; ceci nous donne la deuxième solution de l'équation  $f''(t) = 0$ .

9. — Nous remarquons que  $\psi(-1/5) = (-1/5)^3 - 3(-1/5)^2 + 5(-1/5) + 1 = -1/125 - 3/25 < 0$ , tandis que  $\psi(0) = 1 > 0$ . Le TVI affirme que  $\psi$  s'annule dans l'intervalle  $] -1/5, 0[$ , d'où l'encadrement demandé.

10. — Utilisons les  $DL_3(0)$  de  $\exp$  et de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  :

$$f(t) = \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right) \times (1 - t^2 + o(t^3)) = \boxed{1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)}$$

Nous en déduisons que la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = x + 1$ , et que  $C_f$  se trouve au-dessous de cette tangente.

11. — La courbe représentative représentée à la figure 1 a été obtenue avec le *script* Maple suivant :

```
f := t -> exp(t)/(1+t^2);
plot([f,exp(1)/2],-4..4,scaling=constrained);
```

En vue de son incorporation dans le présent document, j'ai inséré (avant le `plot`) la commande suivante, pour «exporter» le tracé au format *PostScript* :

```
plotsetup(ps,plotoutput='pb1a.ps',
  plotoptions='portrait,noborder,height=1000,width=1000');
```

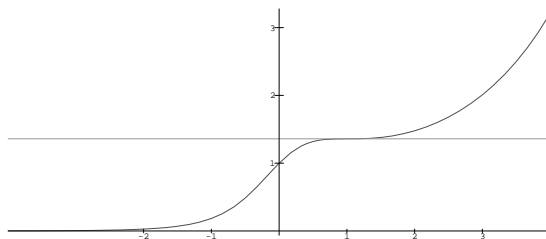


Figure 1 : courbe représentative de  $f$

$f''$  s'annule en changeant de signe, au voisinage de 1 ; donc le point d'abscisse 1 de  $\mathcal{C}_f$  est un point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente en ce point.

12. – Immédiat, avec les résultats des questions 5 et 7 :

$n$	0	1	2
$P_n$	1	$X^2 - 2X + 1$	$X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$

13. – Nous partons de l'égalité  $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$  ; par dérivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}(f^{(n)}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{(1+t^2)^{n+1}(P'_n(t)e^t + P_n(t)e^t) - 2(n+1)t(1+t^2)^n P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{2(n+1)}} \\ &= \left((1+t^2)(P'_n(t) + P_n(t)) - 2(n+1)tP_n(t)\right) \frac{e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

Notons  $P_{n+1} : t \in \mathbb{R} \mapsto (1+t^2)P'_n(t) + (t^2 - 2(n+1)t + 1)P_n(t)$  : il est clair que  $P_{n+1}$  est une fonction polynôme, et l'on a  $f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)e^t}{(1+t^2)^{(n+1)+1}}$  pour tout réel  $t$ . Traduite en termes de polynômes, l'égalité définissant  $P_{n+1}$  devient  $\boxed{P_{n+1} = (1+X^2)P'_n + (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n}$ .

14. – Raisonnons par récurrence. Comme  $P_0 = 1$ , l'assertion est vérifiée au rang 0. Supposons-la acquise au rang  $n$  : alors  $P'_n$  est elle aussi une fonction polynôme dont tous les coefficients sont dans  $\mathbb{Z}$  ; il en est de même de  $1+X^2$  et de  $X^2 - 2(n+1)X + 1$ . Par produit et somme, il en est de même de  $P_{n+1}$ . Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

15. – Au vu des expressions de  $P_0, P_1$  et  $P_2$ , il semble raisonnable de noter  $\mathcal{C}(n)$  l'assertion suivante :

$$\boxed{P_n \text{ est unitaire de degré } 2n}$$

$\mathcal{C}(0)$  est vraie. Supposons  $\mathcal{C}(n)$  acquise. Alors  $(1+X^2)P'_n$  est de degré strictement inférieur à  $2n+2$ , tandis que  $(X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n$  est unitaire de degré  $2n+2$ . Donc  $P_{n+1}$  est unitaire de degré  $2n+2 = 2(n+1)$ , ce qui établit  $\mathcal{C}(n+1)$  et termine la démonstration par récurrence.

16. – Nous avons  $c_0 = P_0(i) = 1$ , et  $c_{n+1} = P_{n+1}(i) = (1+i^2)P'_n(i) + (i^2 - 2(n+1)i + 1)P_n(i) = -2(n+1)ic_n$ . Les  $c_n$  sont donc tous non nuls ; ceci autorise le télescopage suivant (on effectue, à la dernière étape, le changement d'indice  $k' = k + 1$ ) :

$$c_n = c_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (-2(k+1)i) = (-2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = (-2i)^n \prod_{k=1}^n k = \boxed{(-2i)^n n!}$$

17. –  $F' = f$  ne prend que des valeurs strictement positives, donc  $\boxed{F \text{ est strictement croissante}}$ .

**18.** — Il suffit de montrer que  $F$  est minorée. Il est clair que  $f(t) < e^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $x < 0$  :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt \geq - \int_x^0 e^t dt = -[e^t]_x^0 = -1 + e^x > -1$$

Ce qui termine la preuve, en utilisant le théorème de la limite monotone.

**19.** — Comme  $F$  est croissante, on a  $F(x) \leq F(0) = 0$  pour  $x \leq 0$ . L'encadrement  $-1 < F(x) \leq 0$  nous donne alors  $\boxed{-1 \leq \ell \leq 0}$  par passage à la limite.

**20.** —  $F'(0) = f(0) = 1$  ; comme  $F(0) = 0$ , l'équation demandée est  $\boxed{y = x}$ .

**21.** — Il suffit d'intégrer terme à terme le  $DL_3$  établi à la question **10**, en n'oubliant pas de prendre en compte la valeur de  $F(0)$  :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

**22.** — *Méthode 1* : notons  $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - f(x) - 2J(x)$ . Alors :

$$\Phi'(x) = F'(x) - f'(x) - 2J'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} - \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2 - x^2 + 2x - 1 - 2x)e^x}{(1+x^2)^2} = 0$$

Ceci montre que  $\Phi$  est constante. Il suffit de noter  $A$  sa valeur constante pour avoir le résultat.

*Méthode 2* : appliquons une IPP à l'intégrale  $F(x)$ . Les fonctions  $u : t \mapsto e^t$  et  $v : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci autorise le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt = \int_0^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t) dt \\ &= [f(t)]_0^x - \int_0^x e^t \left( -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \right) dt = f(x) - f(0) + 2 \int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= f(x) - 1 + 2(J(x) - J(0)) = f(x) - 1 - 2J(0) + 2J(x) \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat demandé, avec  $\boxed{A = -1 - 2J(0)}$ .

**23.** —  $J(x) \geq 0$  est clair. Par ailleurs, on a certainement  $1+t^2 \geq t^2$ , donc  $\frac{t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$

puis  $\frac{te^t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{e^t}{t^3}$  pour  $t \geq 1$  ; par intégration sur  $[1, x]$ , on obtient  $J(x) \leq K(x)$ . Ainsi

$$\boxed{0 \leq J(x) \leq K(x)}.$$

**24.** — Soit  $x > 1$ . Les fonctions  $\varphi : t \in [1, x] \mapsto e^t$  et  $\psi : t \in [1, x] \mapsto \frac{1}{t^3}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci justifie l'IPP suivante :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \int_1^x \varphi'(t)\psi(t) dt = [\varphi(t)\psi(t)]_1^x - \int_1^x \varphi(t)\psi'(t) dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{t^3} \right]_1^x - \int_1^x e^t \left( -\frac{3}{t^4} \right) dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3 \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3L(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^3} - e$ , quantité qui est manifestement négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**25.** — Remarquons que le point  $\xi = x^{3/4}$  en lequel l'énoncé propose d'effectuer la coupure se trouve effectivement dans l'intervalle  $[1, x]$  puisque  $x \geq 1$ . Notant  $L_1(x) = \int_1^\xi \frac{e^t}{t^4} dt$  et  $L_2(x) = \int_\xi^x \frac{e^t}{t^4} dt$ ,

nous aurons  $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$ . Étudions chacune de ces intégrales :

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \int_1^\xi \frac{e^t}{t^4} dt \leq \int_1^\xi \frac{e^\xi}{t^4} dt = e^\xi \int_1^\xi \frac{dt}{t^4} = e^\xi \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_1^\xi = e^\xi \left( -\frac{1}{3\xi^3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{e^\xi}{3} \left( 1 - \frac{1}{x^{9/4}} \right) = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{3e^{x-\xi}} \left( 1 - \frac{1}{x^{9/4}} \right) \\ L_2(x) &= \int_\xi^x \frac{e^t}{t^4} dt \leq \int_\xi^x \frac{e^x}{t^4} dt = e^x \int_\xi^x \frac{1}{t^4} dt = e^x \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_\xi^x = e^x \left( \frac{1}{3\xi^3} - \frac{1}{3x^3} \right) \\ &= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{3} \left( \frac{1}{x^{9/4}} - \frac{1}{x^3} \right) = \frac{e^x}{x^2} \left( \frac{1}{3x^{1/4}} - \frac{1}{3x} \right) \end{aligned}$$

Remarquons que  $\xi = x^{3/4}$  est un  $o(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ; donc  $x - \xi \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ , d'où :

$$\frac{x^2}{3e^{x-\xi}} = \frac{x^2}{3(x-\xi)^2} \times \frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} \times \frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}}$$

L'équivalent signalé plus haut implique  $x - \xi \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$  ; alors, par raison de croissances comparées,

$\frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  ; donc  $\frac{x^2}{3e^{x-\xi}}$  est un  $o(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . D'autre part,  $1 - \frac{1}{x^{9/4}}$  est un

$\mathcal{O}(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Nous pouvons donc affirmer que  $L_1(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  dans les mêmes conditions.

De même :  $\frac{1}{3x^{1/4}} - \frac{1}{3x}$  est un  $o(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ; donc  $L_2(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  dans les mêmes conditions.

Finalement,  $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**26.** —  $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ . Or  $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$  ; la constante  $A$  est un  $o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ . Enfin,  $0 \leq J(x) \leq K(x)$  implique que  $J(x)$  est dominé par  $K(x)$  ; mais les résultats des questions **24** et **25** montrent que  $K(x)$  est un  $o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ . Finalement,  $\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}}$ .

**27.** — La courbe représentative de  $F$  est convexe puisque  $F' = f$  est croissante. Elle possède une asymptote d'équation  $y = k$  (avec  $k \approx -0.62$ ) ; cette asymptote apparaît sur la figure.

L'équivalent obtenu à la question **26** montre que la courbe possède une direction asymptotique « verticale » lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

La courbe passe par l'origine puisque  $F(0) = 0$  ; et la tangente en ce point a pour pente  $F'(0) = f(0) = 1$ , donc son équation est  $y = x$ .

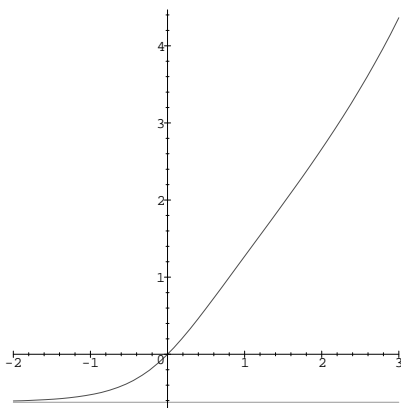


Figure 2 : courbe représentative de  $F$

## Problème 2

1. — Le noyau de  $\mathbf{D}$  est l'ensemble des fonctions constantes. L'image de  $\mathbf{D}$  est l'espace  $E$  entier : en effet, soit  $f \in E$  ;  $f$  est continue, donc possède des primitives. Soit  $F$  l'une d'elles : alors  $\mathbf{D}(F) = f$ . Donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C} \equiv b0$ , ce qui en fait un élément de  $E$  ; et c'est un antécédent de  $f$ , ce qui montre que  $\mathbf{D}$  est surjectif.

2. — Il est clair que  $t = 0$  est un bon choix ; nous prendrons également  $u = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  et  $v = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -u$ .

Écrivons le système correspondant :

$$\begin{cases} af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0 \\ af_1(u) + bf_2(u) + cf_3(u) = 0 \\ af_1(v) + bf_2(v) + cf_3(v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ ae^u + be^{-u/2} = 0 \\ ae^{-u} + be^{u/2} = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système formé par les deux dernières équations est  $e^{3u/2} - e^{-3u/2} = 2 \operatorname{sh}(3u/2)$  ; comme  $u$  n'est pas nul, ce déterminant n'est pas nul, donc la seule solution de ce système homogène est  $a = b = 0$  ; en reportant dans la première égalité, nous obtenons  $c = 0$ , ce qui termine la preuve.

3. — Nous avons :

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_2 + cf_3)(t) &= af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = ae^t + be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= a\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + b\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\right) \\ &\quad + c\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) \\ &= a + at + \frac{at^2}{2} + \frac{bt\sqrt{3}}{2} - \frac{bt^2\sqrt{3}}{4} + c - \frac{ct}{2} - \frac{ct^2}{4} + o(t^2) \\ &= (a + c) + \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right)t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

L'unicité du DL nous donne le système :

$$\begin{cases} a & +c & = 0 & \mathcal{L}_1 \\ a & +\frac{b\sqrt{3}}{2} & -\frac{c}{2} & = 0 & \mathcal{L}_2 \\ \frac{a}{2} & -\frac{b\sqrt{3}}{4} & -\frac{c}{4} & = 0 & \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

En observant  $\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_3$ , nous obtenons  $b = 0$ . Par ailleurs,  $\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_3$  nous donne  $2a - c = 0$ , ce qui, avec  $\mathcal{L}_1$ , nous donne  $a = c = 0$ . Conclusion :  $a = b = c = 0$ , et la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

Remarquons que Lucie aurait eu moins de travail en calculant le développement limité de la fonction  $t \mapsto e^{t/2}(af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)) \dots$

4. — Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $f_2(t)$  et  $f_3(t)$  tendent vers 0 tandis que  $f_1(t)$  tend vers  $+\infty$ . Ceci impose

$\boxed{a = 0}$ . Nous avons donc  $bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ , soit  $be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$  ou encore

$b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$  pour tout réel  $t$ . Les parités respectives de  $\sin$  et  $\cos$  imposent alors

$\boxed{b = 0}$  et  $\boxed{c = 0}$ .

5. — Par linéarité, il suffit de prouver que  $\mathbf{D}(f_1)$ ,  $\mathbf{D}(f_2)$  et  $\mathbf{D}(f_3)$  sont toutes trois dans  $G$ . Or :

$$(\mathbf{D}(f_1))(t) = f_1'(t) = e^t = f_1(t)$$

$$(\mathbf{D}(f_2))(t) = f_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t)$$

$$(\mathbf{D}(f_3))(t) = f_3'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2(t) - \frac{1}{2}f_3(t)$$

Ces égalités valent pour tout réel  $t$ . Nous en déduisons  $\mathbf{D}(f_1) = f_1$ ,  $\mathbf{D}(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$  et  $\mathbf{D}(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$  ce qui termine la preuve.

6. — Il suffit d'appliquer le résultat de la question 5 :  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

7. — Nous obtenons successivement  $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Autre méthode, qui ne requiert pratiquement aucun calcul : considérons  $\mathbf{M}$  comme la matrice d'un endomorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{R}^3$ , ce dernier muni du produit scalaire canonique et de l'orientation standard.  $\mathbf{M}$  est orthogonale mais n'est pas symétrique, donc  $\psi$  est un endomorphisme orthogonal mais n'est pas une symétrie orthogonale. La première colonne montre que c'est  $\psi$  est une rotation ; les deux autres colonnes nous indiquent que son angle  $\alpha$  est défini par  $\cos(\alpha) = -1/2$  et  $\sin(\alpha) = \sqrt{3}/2$ , donc  $\alpha = 2\pi/3$  ; par suite  $\psi^3$  est l'endomorphisme identique de  $\mathbb{R}^3$ , et donc  $\mathbf{M}^3$  est la matrice identité.

8. — Nous avons établi  $\mathbf{M}^3 = I_3$  : donc  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{M} = I_3$ , ce qui montre que  $\mathbf{M}$  est inversible, et que  $\boxed{\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^2}$ .

9. — Nous savons déjà (question 5) que  $\widehat{\mathbf{D}}$  est un endomorphisme de  $G$ . La matrice de  $\widehat{\mathbf{D}}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est inversible, donc  $\widehat{\mathbf{D}}$  est un automorphisme de  $G$ .

10. — La relation  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^2$  nous donne immédiatement  $\widehat{\mathbf{D}}^{-1} = \widehat{\mathbf{D}}^2$ .

11. — Voici le tableau demandé :

$i$	$f_i(0)$	$f'_i(0)$	$f''_i(0)$
1	1	1	1
2	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Quelques explications : l'obtention de la première ligne et de la première colonne sont immédiates. Les expressions de  $\mathbf{D}(f_2)$  et  $\mathbf{D}(f_3)$  établies plus haut nous donnent le reste de la deuxième colonne. Pour terminer, notons que  $f''_2 = -\frac{1}{2}f'_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f'_3$  et  $f''_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f'_2 - \frac{1}{2}f'_3$  : en injectant dans ces formules les valeurs que nous venons de placer dans la deuxième colonne, nous complétons la troisième colonne.

12. — Linéarité, symétrie, positivité sont claires. Il nous reste à montrer que l'égalité  $\varphi(g, g) = 0$  implique que  $g$  est la fonction nulle. Soient  $a, b$  et  $c$  les coordonnées de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $G$  : ainsi  $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ . Alors :

$$\begin{aligned} (g(0))^2 &= (a + c)^2 \\ (g'(0))^2 &= \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 \\ (g''(0))^2 &= \left(a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Or  $\varphi(g, g) = (g(0))^2 + (g'(0))^2 + (g''(0))^2$  ; l'égalité  $\varphi(g, g) = 0$  implique que les trois carrés sont nuls ; donc  $a + c = 0$ ,  $a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$  et  $a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$ . Nous retrouvons le système établi et résolu à la question 3 ; donc  $\boxed{a = b = c = 0}$  ce qui termine la preuve.

Remarquons que l'étudiante Lucie, voyant que  $g(0)$ ,  $g'(0)$  et  $g''(0)$  sont tous trois nuls, peut tout de suite conclure...

13. — Nous vérifions sans peine que  $\varphi(f_1, f_2)$ ,  $\varphi(f_1, f_3)$  et  $\varphi(f_2, f_3)$  sont tous trois nuls. Donc  $\boxed{\text{la base } \mathcal{B} \text{ est orthogonale}}$ .

14. — Nous constatons que  $\varphi(f_1, f_1) = 3$ . Donc la base  $\mathcal{B}$  n'est pas orthonormée.

15. — Par définition,  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^3$ . Supposons  $f$  de classe  $\mathcal{D}^{3k}$  : alors  $f''' = f$  montre que  $f''''$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k}$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k+3}$ . Par récurrence, nous obtenons que  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k}$  pour tout  $k \geq 1$ , donc  $f$  de classe  $\mathcal{D} \equiv b_0$ , ce qui est la même chose qu'être de classe  $\mathcal{C} \equiv b_0$ .

16. — Que la fonction nulle soit une solution polynomiale de  $(\mathcal{E})$  est une conséquence de la linéarité de cette équation. C'est la seule : si  $f$  est une fonction polynôme autre que la fonction nulle, alors, notant  $n$  son degré, nous aurons  $\deg(f''') \leq n - 3$ , donc  $f''''$  ne peut être égale à  $f$ .

17. — Ceci est une conséquence immédiate de l'égalité établie à la question 7 : chaque élément de  $G$  est invariant par  $\widehat{\mathbf{D}}^3$ , donc par  $\mathbf{D}^3$ , ce qui revient à dire qu'il appartient au noyau de  $\mathbf{T}$ .

18. —  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^3$ , donc  $f, f'$  et  $f''$  sont dérivables ; alors  $g$  est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont.  $g' = (f'' + f' + f)' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = f'' + f' + f = g$  puisque  $f''' = f$ . Donc  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .

19. — C'est la droite vectorielle engendrée par  $f_1$ .

20. — Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants et homogène. La théorie nous dit de résoudre d'abord l'équation caractéristique associée  $r^2 + r + 1 = 0$  : le discriminant de celle-ci est  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$  ; donc cette équation possède deux solutions complexes conjuguées  $r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  sont donc les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \lambda \exp\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \exp\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}t\right)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des complexes arbitraires. Mais nous savons aussi que les solutions à valeurs réelles de cette même équation sont les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels arbitraires ; une autre façon de le dire est que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  est le plan vectoriel engendré par  $f_2$  et  $f_3$  : donc  $(f_2, f_3)$  est une base de cet ensemble.

21. — Il nous suffit de trouver une solution particulière de cette équation différentielle. Le second membre est une « exponentielle polynôme », et le coefficient de  $t$  dans l'exponentielle (soit 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique ; la théorie nous dit de chercher une solution  $h$  de la forme  $t \mapsto \mu e^t$  ; alors  $h = h' = h''$ , donc  $h'' + h' + h$  est la fonction  $t \mapsto 3\mu e^t$ , et il est clair qu'il suffit de prendre  $\mu = \lambda/3$ . Donc les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$  sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \beta e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3} e^t$$

22. — Des questions 18 et 19, nous déduisons qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $g = \lambda f_1$ . Ainsi, de par la définition de  $g$ , la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$ . Le résultat de la question 21 nous permet d'affirmer l'existence de réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f = \frac{\lambda}{3} f_1 + \alpha f_2 + \beta f_3$  : ceci montre bien l'appartenance de  $f$  à  $G$ .

FIN