

Mines-Pont PSI 2019 Mathématiques 1 – Corrigé

Nota Bene à l'attention des préparationnaires qui utiliseraient ce corrigé : ce document ne doit pas s'entendre comme une copie type et je m'y permets certains « raccourcis » qui seraient abusifs dans une copie de concours.

1.

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on applique la règle de d'Alembert à la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} |z|^n$:

$$\forall n \geq 1, \frac{\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} |z|^{n+1}}{\frac{(pn)^r}{(pn)!} |z|^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z| \frac{(pn)!}{(p(n+1))!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Ceci assure que la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} |z|^n$ converge pour tout complexe z et donc que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ est $+\infty$.

- On en déduit que la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} (z^p)^n$ converge pour tout complexe z et donc que la série entière $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$ admet également $+\infty$ pour rayon de convergence.

2.

Pour tout réel x :

$$- S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \text{ ce qui assure la validité de } H_{0,1} ;$$

$$- S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \text{ ce qui assure la validité de } H_{0,2}.$$

3.

Par utilisation du théorème de transfert et de la convergence absolue de la série $\sum \frac{n^r x^n}{n!}$ on en déduit que Z_x^r est d'espérance finie et que :

$$\mathbb{E}(Z_x^r) = \frac{1}{x^r} \sum_{n=0}^{+\infty} n^r \mathbb{P}(X_x = n) = \frac{e^{-x}}{x^r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x).$$

4.

- $\mathbb{E}(X_x) = \mathbb{V}(X_x) = x$.

- On remarque que $[|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}] = [|X_x - x| \geq x^{2/3}]$ et en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (légitime car X_x admet un moment d'ordre 2) on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) \leq \frac{\mathbb{V}(X_x)}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \text{ d'où le résultat demandé.}$$

5.

• La première inégalité découle directement de l'inégalité de Markov appliquée à Z_x^r (qui est positive et d'espérance finie) ainsi que de la croissance de la fonction $t \mapsto t^r$ sur \mathbb{R}_p :

$$\mathbb{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) = \mathbb{P}(Z_x^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_x^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}.$$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1 - x^{-1/3})^r) = 1$ et de plus :

$$[|Z_x - 1| \leq x^{1/3}] \subset [Z_x - 1 \geq -x^{1/3}] \text{ donc } \mathbb{P}(|Z_x - 1| \leq x^{1/3}) \leq \mathbb{P}(Z_x - 1 \geq -x^{1/3}).$$

Or la question 4 assure par passage au complémentaire que $\mathbb{P}(|Z_x - 1| \leq x^{1/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et

on en déduit donc que $\mathbb{P}(Z_x - 1 \geq -x^{1/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

En conclusion, on a bien $(1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}(Z_x \geq 1 - x^{1/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

6.

On pose la fonction $f : t \mapsto \prod_{k=0}^{N-1} (t - k)$ et on applique le théorème de transfert (où la série considérée est absolument convergente) :

$$\mathbb{E}(Y_{x,N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \mathbb{P}(X_x = n) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{n!}{(n-N)!} e^{-x} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} x^N \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^{n-N}}{(n-N)!} = x^N.$$

7.

• La famille (H_0, \dots, H_N) est une famille de polynômes de degrés échelonnés (de 0 à N) et est donc une base de $\mathbb{R}_N[T]$, ce qui assure que T^N se décompose dans cette base et donc qu'il

existe des réels a_0, \dots, a_N tels que $T^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(T)$.

En évaluant en 0 on obtient $a_0 = 0$ et en considérant le coefficient de degré N on obtient $a_N = 1$.

$$\text{On a alors pour tout } x > 0, X_x^N = \sum_{k=1}^N a_k H_k(X_x) = \sum_{k=1}^N a_k Y_{x,k}.$$

• Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}(Z_x^N) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{\mathbb{E}(Y_{x,k})}{x^N}$.

$$\text{Pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \frac{\mathbb{E}(Y_{x,k})}{x^N} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{k-N} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq N-1 \\ 1 & \text{si } k = N \end{cases}.$$

Donc $\mathbb{E}(Z_x^N) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a_N = 1$.

8.

• On étudie les variations de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^s - s(t-1) - 1$.

On a pour $t > 0$, $g'(t) = s(t^{s-1} - 1)$ où $s-1 < 0$ ce qui assure que g admet un maximum en 1, or $g(1) = 0$ on en déduit que g est négative sur \mathbb{R}_+ ce qui assure le résultat souhaité.

• En multipliant pour tout $t \geq 0$ l'inégalité obtenue par t^N on obtient :

$$t^r \leq s(t-1)t^N + t^N = (1-s)t^N + st^{N+1}.$$

Cela assure que pour tout $x > 0$, puisque $Z_x \geq 0$ on a $Z_x^r \leq (1-s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}$.

9.

• Les résultats obtenus aux questions 5 et 8 donnent l'encadrement suivant :

$$(1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq \mathbb{E}(Z_x^r) \leq (1 - s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1 - x^{-1/3})^r \mathbb{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3})) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1 - s)Z_x^N + sZ_x^{N+1}) = 1.$$

Le fameux théorème des gendarmes permet alors de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}(Z_x^r)) = 1$

• En reprenant l'expression de $\mathbb{E}(Z_x^r)$ de la question 3 on a donc montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x) \right) = 1 \text{ i.e. que } S_{r,1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x \text{ ce qui assure la validité de } H_{r,1}.$$

10.

• La fonction φ_x est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$\varphi'_x(t) = t^{1-r}(t-1)^{r-1} > 0.$$

De plus $\varphi_x(1) = -x$ et $\varphi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ ce qui assure que φ_x réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[-x, +\infty[$.

Puisque $0 \in [-x, +\infty[$, on en déduit que 0 admet un unique antécédent par la fonction φ_x .

• Pour tout $n \geq 1$ on a $x \left(\frac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1 \right) = \varphi_x(n)$ donc :

— si $n \leq [t_x]$, on a $\left(\frac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1 \right) \leq 0$ i.e. $u_{n-1}(x) \leq u_n(x)$;

— si $n \geq [t_x] + 1$, on a $\left(\frac{u_{n-1}(x)}{u_n(x)} - 1 \right) \geq 0$ i.e. $u_{n-1}(x) \geq u_n(x)$.

On en déduit que la famille $(u_n(x))_{n \leq [t_x]}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geq [t_x]}$ est décroissante.

11.

• On effectue un développement asymptotique pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x + \alpha) &= x \left(\left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{1-r} + \left(1 + \frac{\alpha-1}{x} \right)^r - 1 \right) \\ &= x \left(\left(1 + (1-r)\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(1 + r\frac{\alpha-1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - 1 \right) \\ &= x \left(\frac{\alpha-r}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \alpha - r \end{aligned}$$

• On fixe maintenant $\epsilon > 0$;

— on considère $\alpha = r + \epsilon$, on a donc $\varphi_x(x + \alpha) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \alpha - r = \epsilon > 0$ donc il existe x_1 tel que pour tout $x \geq x_1$:

$\varphi_x(x + \alpha) \geq 0$ où $0 = \varphi_x(t_x)$ et donc par croissance de φ_x on a $x + \alpha \geq t_x$ i.e. $x + r + \epsilon \geq t_x$ i.e. $t_x - x - r \leq \epsilon$;

— on considère $\alpha = r - \epsilon$, on a donc $\varphi_x(x + \alpha) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \alpha - r = -\epsilon < 0$ donc il existe x_2 tel que pour tout $x \geq x_2$:

$\varphi_x(x + \alpha) \leq 0$ où $0 = \varphi_x(t_x)$ et donc par croissance de φ_x on a $x + \alpha \leq t_x$ i.e. $x + r - \epsilon \leq t_x$ i.e. $t_x - x - r \geq -\epsilon$;

— on pose enfin $x_0 = \max(x_1, x_2)$ et on a pour tout $x \geq x_0$: $-\epsilon \leq t_x - x - r \leq \epsilon$.

On a donc démontré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t_x - x - r) = 0$.

12.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{u_{[x]+k}(x)}{u_{[x]}(x)} = \left(\frac{[x]+k}{[x]} \right)^r x^k \frac{[x]!}{([x]+k)!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{[x]} \right)^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1, \text{ d'où l'équivalence souhaitée.}$$

13.

• On a montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t_x - x - r) = 0$ où $r > 0$.

On peut donc se placer pour x au voisinage de $+\infty$ tel que $t_x > x$, et on a alors, pour tout $i \in \llbracket [x] - m, [x] \rrbracket$, $u_i(x) \geq u_{[x]-m}(x)$ ce qui assure que $\sum_{i=[x]-m}^{[x]} u_i(x) \geq (m+1)u_{[x]-m}(x)$.

D'où $\frac{\sum_{i=[x]-m}^{[x]} u_i(x)}{mu_{[x]}(x)} \geq \frac{m+1}{m} \frac{u_{[x]-m}(x)}{u_{[x]}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{m+1}{m} > 1$ ce qui assure qu'au voisinage de $+\infty$ on a bien $\sum_{i=[x]-m}^{[x]} u_i(x) \geq mu_{[x]}(x)$.

• L'inégalité précédente permet alors d'écrire, pour x au voisinage de $+\infty$:

$$u_{[x]}(x) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=[x]-m}^{[x]} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \frac{x^r}{m} \sum_{i=[x]-m}^{[x]} \frac{x^i}{i!} \leq \frac{x^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{m}.$$

14.

• On a montré à la question 13 que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists x_m > 0, \forall x \geq x_m, u_{[x]}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}$ ce qui assure que $u_{[x]}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^r e^x)$.

L'équivalent de la question 12 permet alors de conclure que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_{[x]+k}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^r e^x)$

• Justifions l'indication de l'énoncé, on utilise pour cela le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t_x - x - r) = 0$ ce qui assure que pour x au voisinage de $+\infty$ on a l'encadrement suivant $x+r-1 \leq t_x \leq x+r+1$ et par croissance de la partie entière $[x+r]-1 \leq [t_x] \leq [x+r]+1$.

Or $[x]+[r] \leq [x+r] \leq [x]+[r]+1$ ce qui assure que $[x]+[r]-1 \leq [t_x] \leq [x]+[r]+2$.

On a donc, pour x au voisinage de $+\infty$, $M_x = \max_{i \in \llbracket -1, 2 \rrbracket} (u_{[x]+[r]+i}(x))$.

Or, pour tout $i \in \llbracket -1, 2 \rrbracket$, on a $u_{[x]+[r]+i}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^r e^x)$, d'où $M_x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^r e^x)$.

15.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ donc $|D_n| \leq \frac{|z^n| + 1}{|z - 1|} = \frac{2}{|z - 1|}$.

• On remarque ici que x n'est pas défini par l'énoncé, ce qui est la seule occurrence d'un tel défaut dans un énoncé généralement très rigoureux quant à la définition des objets considérés, on peut néanmoins considérer un réel quelconque.

Pour tout réel x , la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant bornée, l'absolue convergence de $\sum u_n(x)$ (établie dès la question 1) assure celles de $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et de $\sum D_n u_n(x)$.

16.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant les convergences des séries considérées :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \\ &= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (D_{n+1} - D_n) u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n = S_{r,1}(zx). \end{aligned}$$

• On a donc $|S_{r,1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{2}{|z-1|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)|$.

Or pour $n \leq \lfloor tx \rfloor$ on a $|u_{n-1}(x) - u_n(x)| = u_n(x) - u_{n-1}(x)$ et pour $n \geq \lfloor tx \rfloor + 1$ on a $|u_{n-1}(x) - u_n(x)| = u_{n-1}(x) - u_n(x)$, ce qui permet d'écrire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\lfloor tx \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor tx \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x));$$

puis par « télescopes » : $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = 2u_{\lfloor tx \rfloor}(x) = 2M_x$;

on en déduit enfin l'inégalité demandée : $|S_{r,1}(x)| \leq \frac{4M_x}{|z-1|}$.

• Le fait que $M_x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$ assure alors immédiatement que $S_{r,1}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$.

17.

• On remarque que ξ est une racine p -ième de l'unité.

Pour tout réel x , en utilisant les convergences des p séries considérées on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} \xi^{nk} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^r}{n!} x^n \sum_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k \right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k = \begin{cases} p & \text{si } n \equiv 0[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, à l'aide du changement d'indice « $n = qp$ »

» on a alors : $\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(qp)^r}{(qp)!} x^{qp} p = p S_{r,p}(x)$.

• On a $S_{r,p}(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $|\xi^k| = 1$ et $\xi^k \neq 1$ donc d'après la question 16, $S_{r,1}(\xi^k x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$, ce qui assure $S_{r,p}(x) = \frac{1}{p} (S_{r,1}(x) + o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x))$ où $S_{r,1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x$.

On a donc $S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x$ ce qui assure la validité de $H_{r,p}$.

18.

Soit $\sum c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R et de somme f , cette fonction f est solution de (E) sur $] -R, R[$ si, et seulement si :

$$\forall x \in] -R, R[, \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$$

Par un changement d'indice dans la première somme cette condition équivaut à :

$$\forall x \in] -R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)c_{n+1} - c_n)x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, cette condition équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)c_{n+1} - c_n = 0$$

$$\text{i.e. à } c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = \frac{c_n}{n(n+1)}$$

$$\text{et enfin à } c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{n}{n!^2} c_1.$$

On remarque que la série entière obtenue admet $+\infty$ pour rayon de convergence et que $f'(0) = c_1$, l'unique solution f de (E) développable en série entière sur \mathbb{R} et telle que $f'(0) = 1$

est donc la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!^2} x^n$.

19.

On applique la formule de Stirling pour chacune des expressions :

$$- c_n = \frac{n}{n!^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2\pi n \frac{e^{2n}}{n^{2n}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2n}}{n^{2n}};$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}} 4^n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2n}}{n^{2n}};$$

$$\text{on a bien l'équivalence souhaitée : } c_n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n.$$

20.

Les conditions d'application du lemme admis étant satisfaites on a (pour $t > 0$) :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n t^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!} (2\sqrt{t})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}(2\sqrt{t});$$

$$\text{or } S_{1/2,2}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{x} e^x \text{ donc } S_{1/2,2}(2\sqrt{t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} t^{1/4} e^{2\sqrt{t}};$$

$$\text{on a enfin : } f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{t}}.$$