E3A, 2002
Mathématiques II, PC

Exercice 1.

1) Si $\mathbf{u}$ est constante, on a pour tout n: $a^2 = a\sqrt{n}$ d'où $a = 0$. Réciproquement, si $a = 0$, $\mathbf{u}$ est constante.

2) Si la suite converge vers l, on obtient $l = 0$ en passant à la limite dans la définition.

3) Si $u_n \geqslant \sqrt{n}$, $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$. De $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant u_n$ on déduit que $\mathbf{u}$ est croissante.

4) (a) On le montre par récurrence sur n; c'est vrai pour $n = k$; si $u_n < \sqrt{n}$, on déduit $u_{n+1} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

(b) Pour $n \geqslant k$ on a: $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant u_n$.

(c) La suite $\mathbf{u}$ est décroissante et minorée (par 0), elle est donc convergente; d'après le 2°, sa limite est 0.

5) Appliquons la fonction ln à $u_{k+1} = \dfrac{u_k^2}{\sqrt{k}}$: $\ln u_{k+1} = 2\ln u_k - \dfrac{\ln k}{2}$; divisons par 2^{k+1}: $\dfrac{1}{2^{k+1}} \ln u_{k+1} = \dfrac{1}{2^k} \ln u_k - \dfrac{\ln k}{2^{k+2}}$. Ajoutons pour k de 1 à $n-1$: $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n = \dfrac{1}{2} \ln a - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\ln k}{2^{k+2}}$; d'où $u_n = a^{2^{n-1}} \exp(-\sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-2} \ln k)$.

6) (a) $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\ln(n+2)}{2\ln(n+1)}$ a pour limite 1/2 donc la série converge par la règle de d'Alembert.

(b) Si pour un entier k on a $u_k < 1$ alors $u_k < \sqrt{k}$ ce qui entraine que la suite converge (d'après le 4°). Réciproquement, si la suite converge, sa limite est 0 et par suite il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

(c) On a calculé: $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n = \dfrac{1}{2} \ln a - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\ln k}{2^{k+2}} = \dfrac{1}{2} \ln a - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{w_{k-1}}{4}$. Si la suite $\mathbf{u}$ converge, on a $u_n < 1$pour n assez grand, d'où $\ln u_n < 0$ et par suite $\sum_{k=1}^{n-1} w_{k-1} > 2\ln a$; on en déduit que $W > 2\ln a$, soit $a < \exp(W/2)$. Réciproquement, si $a < \exp(W/2)$, donc $W > 2\ln a$, il existe n tel que $\sum_{k=1}^{n-1} w_{k-1} > 2\ln a$ (la suite (Σw_n) est croissante); pour ce n on a $\ln u_n < 0$ d'où $u_n < 1$ et la suite $\mathbf{u}$ converge.

Exercice 2.

1) f est de classe C^∞ car les fonctions sin et $(x,y) \mapsto x+y$ le sont.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = \cos x - \cos(x+y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = \cos y - \cos(x+y)$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$ est donc équivalent à $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$. Il y a 2 cas: soit $y = x + 2k\pi$ et $\cos x = \cos(2x)$, d'où $x = 2k'\pi$ ou $x = 2k'\pi/3$; soit $y = -x + 2k\pi$ et $\cos x = 1$, d'où $x = 2k'\pi$. Finalement on obtient 3 solutions dans le carré $C = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$: $z = (0,0), z = (2\pi/3, 2\pi/3)$ et $z = (-2\pi/3, -2\pi/3)$.

3) $f(x,y) = 2\sin(\dfrac{x+y}{2}) \left(\cos(\dfrac{x-y}{2}) - \cos(\dfrac{x+y}{2})\right) = 2\sin(\dfrac{x+y}{2}) 2\sin(\dfrac{x}{2})\sin(\dfrac{y}{2})$.

4) D'une part, $f(x+2\pi, y) = f(x, y+2\pi) = f(x,y)$ et $f(-x,-y) = -f(x,y)$. D'autre part, soit T le triangle défini par $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $x+y \leqslant 2\pi$. $f(z) > 0$ si $z = (x,y)$ est à l'intérieur de T, $f(z) = 0$ si z est sur le bord de T, $f(z) < 0$ si z est à l'intérieur de T' symétrique de T par rapport à O. On en déduit aisément $S_0, S_{>0}$ et $S_{<0}$ par des translations de 2π selon $x'Ox$ ou $y'Oy$.

5) Un extréma local de f est un point critique; ceux qui sont à l'intérieur du carré C sont donc les 3 points obtenus au 2°. $z = (0,0)$ n'est pas un extrémum puisqu'il est sur la frontière entre $S_{>0}$ et $S_{<0}$. Montrons que les 2 autres sont des extrémums. f étant continue sur le compact T, elle y est bornée et atteint ses bornes; f étant nulle sur les bords et positive à l'intérieur, elle a un maximum à l'intérieur de T, au seul point critique, $z = (2\pi/3, 2\pi/3)$ (remarque: c'est l'isobarycentre de T). La valeur du maximum est $M = 2\sin(2\pi/3) - \sin(4\pi/3) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Par symétrie par rapport à O, il y a un minimum local en $z = (-2\pi/3, -2\pi/3)$ égal à $-M$.

6) Puisqu'on recouvre le plan avec les translatés de T et T', la fonction f a un maximum absolu M atteint en tous les points $z = (2\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k'\pi)$ et un minimum absolu $-M$ atteint en tous les points $z = (-2\pi/3 + 2k\pi, -2\pi/3 + 2k'\pi)$

Exercice 3.

1) $x'(t) = \dfrac{-3(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}$: x est croissante sur $]-\infty, -1/2[$ et décroissante sur $]-1/2, +\infty[$.
$y'(t) = \dfrac{3(1-t^2)}{(t^2+t+1)^2}$: y est croissante sur $]-1, 1[$, décroissante sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$.

2) x et y ont pour limite 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Avec $x(-1/2) = 4$, $y(-1) = -3$ et $y(1) = 1$ on déduit: $0 \leqslant x(t) \leqslant 4$ et $-3 \leqslant y(t) \leqslant 1$. Ce sont les équations d'un carré de centre (2,-1).

3) (a) O est le point limite en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) $t\overrightarrow{OM(t)} = (tx(t), ty(t))$ a pour limite (0,3) en $+\infty$ et $-\infty$.

(c) La droite $\mathcal{D}(O, t\overrightarrow{OM(t)})$ a pour position limite en $+\infty$ et $-\infty$ l'axe des y qui est donc tangent à Γ en O.

4) De $y = tx$ on déduit $t = \dfrac{y}{x}$ que l'on reporte dans $(t^2 + t + 1)x - 3 = 0$ d'où l'équation $x^2 + xy + y^2 - 3x = 0$. Le point O vérifie aussi cette équation.

5) Cette équation est l'équation d'une conique inscrite dans un carré, c'est donc une ellipse.

6) La tangente est orthogonale au vecteur gradient égal à $(2x + y - 3, x + 2y)$. Elle est donc verticale si et seulement si $x + 2y = 0$ qui entraine $3y^2 + 6y = 0$, d'où $y = 0$ et $x = 0$ (c'est le point O) ou $y = -2$ et $x = 4$ (c'est le point A). Le milieu de $[O, A]$ est $G(2, -1)$. Le centre d'une l'ellipse étant centre de symétrie, la symétrique de la tangente verticale au point O est donc aussi verticale donc A est symétrique de O et le centre de l'ellipse est bien le milieu de $[O, A]$.

7) (a) La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée que l'on peut choisir directe. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 3/4$ qui a pour racines $1/2$ et $3/2$. Une base orthonormée directe de diagonalisation associée est $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \dfrac{(1, -1)}{\sqrt{2}}, \overrightarrow{v} = \dfrac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$.

(b) Les axes de Γ' sont donc les droites $\mathcal{D}(G, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}(G, \overrightarrow{v})$ d'équations $y = -x + 1$ et $y = x - 3$. Ce sont les diagonales du carré contenant l'ellipse.

(c) Dans le repère $(G, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'équation de l'ellipse est $1/2X^2 + 3/2Y^2 = C^{ste}$; les sommets de l'ellipse sont sur l'axe $(G, \overrightarrow{u})$ c'est à dire la droite d'équation $y = -x + 1$. Celle-ci coupe l'ellipse en (x, y) vérifiant $y = 1 - x$ et $x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 - 3x = 0$ soit $x^2 - 4x + 1 = 0$ d'où les deux sommets: $S_1(2 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ et $S_2(2 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$. Remarque: en reportant $x = 2$ et $y = -1$ dans l'équation de Γ', on obtient l'équation en X et Y : $X^2/6 + Y^2/2 = 1$ d'où $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$ et $e = \sqrt{2/3}$.

8)