

Partie I - Questions préliminaires

- I.1)** La fonction Γ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, donc continue sur $[1, 2]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, 2[$. En plus, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
- I.2)** La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est continue, intégrable et non identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ donc pour tout x strictement positif,

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} > 0$$

En particulier la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et on a $\Gamma'(c) = 0$, donc $\Gamma'(x) > 0$ sur $[2, +\infty[$ car $c < 2$. En d'autres termes, Γ est strictement croissante sur cet intervalle.

- I.3)** Soit γ un réel strictement positif. On sait que $\gamma^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$. Puisque $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} O(\gamma^{[x]+1})$, $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} o(\Gamma([x]))$. D'une autre part, par croissance de Γ au voisinage de $+\infty$, on a $\Gamma([x]) \underset{+\infty}{=} O(\Gamma(x))$. Donc $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} o(\Gamma(x))$ ou encore $\gamma^x \underset{+\infty}{=} o(\Gamma(x))$

Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence.

- II.A)** Soit ϕ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et intégrable. On suppose de plus que ϕ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ pour un certain $t_0 \geq 0$.

- II.A.1)** La fonction ϕ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ donc admet une limite l en $+\infty$. Si $l < 0$, alors il existe $A \geq t_0$ tel que $\phi(t) < \frac{l}{2}$ et donc $-\phi(t) > \frac{-l}{2} > 0$ pour $t \geq A$, ce qui est impossible car ϕ est intégrable sur $[A, +\infty[$ et $t \mapsto \frac{-l}{2}$ est non intégrable sur $[A, +\infty[$. Donc $l \geq 0$ et

$$\forall t \in [t_0, +\infty[; \phi(t) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \inf_{x \geq t_0} \phi(x) = l \geq 0$$

(En fait, on a $l = 0$ car f est intégrable et décroissante sur $[t_0, +\infty[$.)

- II.A.2)** Soit h un réel strictement positif.

- a) Soit $N > \frac{t_0}{h}$ de sorte que pour tout $n \geq N$, on ait $nh \geq Nh \geq t_0$. Fixons $n \geq N + 1$. Pour tout $t \in [(n-1)h, nh]$, on a, par décroissance de ϕ , $0 \leq \phi(nh) \leq \phi(t)$. Donc

$$0 \leq h\phi(nh) = \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh) dt \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$$

- b) La série $\sum_{n \geq N+1} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$ est convergente car ϕ est intégrable, l'inégalité établie dans la question précédente permet de conclure à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} h\phi(nh)$, puisqu'elle est de terme général positif à partir d'un certain rang et majoré par le terme général d'une série convergente.

- II.A.3)** Soit $\varepsilon > 0$. La fonction ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, donc il existe $A > \max(t_0, 1)$ tel que $\int_A^{+\infty} \phi(t) dt < \varepsilon$ et $\phi(A-1) < \varepsilon$. En plus, elle est continue sur le segment $[0, A]$, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de ce segment de pas strictement inférieur à δ , on a :

$$\left| \int_0^A \phi(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \phi(\alpha_k) \right| < \varepsilon$$

Soit maintenant h un réel tel que $0 < h < \min(\delta, 1)$ et la subdivision $(0, h, \dots, ph, A)$ de $[0, A]$ avec $p = \left\lceil \frac{A}{h} \right\rceil$ qui est une subdivision de pas strictement inférieur à δ . Alors,

$$\left| \int_0^A \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{p-1} h\phi(nh) - (A - ph)\phi(ph) \right| < \varepsilon$$

ou encore, puisque $0 \leq \phi(ph) < \varepsilon$, $0 \leq A - ph < h$ et $h < 1$, $\left| \int_0^A \phi(t) dt - \sum_{n=0}^p h\phi(nh) \right| < \varepsilon + h\varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon$.
D'un autre coté, pour $n \geq p+1$, on a $nh \geq A \geq t_0$. D'après la question précédente,

$$0 \leq \sum_{n=p+2}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \int_{(p+1)h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \int_A^{+\infty} \phi(t) dt < \varepsilon$$

Tenant compte du fait que $h\phi(h(p+1)) \leq h\phi(A) < \varepsilon$ et les autres inégalités établies auparavant, nous aurons :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq \left| \int_0^A \phi(t) dt - \sum_{n=0}^p h\phi(nh) \right| + \int_A^{+\infty} \phi(t) dt + \sum_{n=p+2}^{+\infty} h\phi(nh) + h\phi(h(p+1)) < 6\varepsilon$$

C'est à dire que $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t) dt$.

II.B) Pour $\alpha > 0$, soit g_α la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g_\alpha(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$.

Contrairement à ce qui est énoncé, cette fonction, pour $\alpha < 1$, n'est pas définie en 0.

II.B.1) On suppose que $\alpha \geq 1$. La fonction g_α est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $g'_\alpha(t) = t^{\alpha-2}e^{-t}((\alpha-1) - t)$. Ceci montre que la fonction g_α est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ pour tout $t_0 > \alpha - 1$. Elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ (raison : la définition de Γ). Ce sont les conditions de **II.A)**. D'après la question **II.A.3)**,

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)$$

ce qui est, en posant $h = -\ln x$ ou encore $x = e^{-h}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha)$$

II.B.2) On considère la série $\sum_{n \geq 0} n^{\alpha-1}x^n$.

a) On applique la règle de D'Alembert pour les séries numériques. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{(n+1)^{\alpha-1}|x|^{n+1}}{n^{\alpha-1}|x|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1}|x| \xrightarrow[n]{n} |x|$$

Le rayon de convergence de cette série entière est donc 1. Notons S_α sa somme.

b) D'après **II.A)** et puisque $\Gamma(\alpha) \neq 0$, on a, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$:

$$(-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) \sim \Gamma(\alpha)$$

mais $(-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}e^{n \ln x} = (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n$ et $\ln x \sim x - 1$. Par suite, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, on aura :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

Partie III - La première fonction eulérienne.

III.A)

- III.A.1)** Soient α et β deux réels > 0 . La fonction $f : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue positive sur $]0, 1[$.
 Pour t qui tend vers 0 avec $t > 0$, $f(t) \sim t^{\alpha-1}$ et $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ car $\alpha - 1 > -1$.
 De même, pour t qui tend vers 1 avec $t < 1$, $f(t) \sim (1-t)^{\beta-1}$ et $t \mapsto (1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur $[1/2, 1[$ car $\beta - 1 > -1$.
 La fonction $f : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est donc intégrable sur $]0, 1[$.

- III.A.2)** Soient α et β deux réels > 0 .

(i) Soient u, v tels que $0 < u < v < 1$. Avec le changement de variables $s = 1 - t$, on a

$$\int_u^v t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \int_{1-v}^{1-u} (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1} ds$$

en tendant u vers 0 et v vers 1, nous aurons : $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

(ii) Soient u, v tels que $0 < u < v < 1$. Avec le changement de variables $s = \frac{t}{1-t}$ (donc $t = \frac{s}{1+s}$ et $dt = \frac{ds}{(1+s)^2}$), on a

$$\begin{aligned} \int_u^v t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt &= \int_{\frac{u}{1-u}}^{\frac{v}{1-v}} \left(\frac{s}{1+s}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+s}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{(1+s)^2} \\ &= \int_{\frac{u}{1-u}}^{\frac{v}{1-v}} \frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha+\beta}} ds \end{aligned}$$

en tendant u vers 0 et v vers 1, nous aurons : $B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$.

(iii) Soient u, v tels que $0 < u < v$. A l'aide d'une intégration par partie, on a :

$$\alpha \int_u^v \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \left[\frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \right]_u^v + (\alpha + \beta) \int_u^v \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}} dt$$

en tendant u vers 0 et v vers $+\infty$ et rappelons que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, nous aurons :

$$\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = (\alpha + \beta) \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}} dt$$

C'est à dire que : $B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$.

(Sans oublier bien sûr que les fonctions : $t \mapsto \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$ sont intégrables.)

III.B) On se propose dans cette question de montrer, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la relation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

- III.B.1)** On suppose que cette relation est vraie pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ et fixons 2 réels strictement positifs α et β .
 Si $\alpha > 1$ et $\beta > 2$ (même chose d'après (i) si $\alpha > 2$ et $\beta > 1$), alors $\alpha + 1 > 2$ et on aura :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} B(\alpha + 1, \beta) \quad (\text{d'après (iii)}) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \quad (\alpha + 1 > 2 \text{ et } \beta > 2) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (\text{la relation } \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Pour les autres cas, $[\alpha > 1 \text{ et } \beta > 1]$, $[\alpha > 0 \text{ et } \beta > 1]$ (qui est le même cas que $[\alpha > 1 \text{ et } \beta > 0]$) puis $[\alpha > 0 \text{ et } \beta > 0]$, on fait la même démarche.

III.B.2) Soient α et β deux réels strictement supérieurs à 2. Pour $n > 0$, on pose :

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

- a) Puisque $\alpha - 1 > 1$ et $\beta - 1 > 1$, la fonction $\psi_{\alpha, \beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Notons $A_{\alpha, \beta} = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi'_{\alpha, \beta}(t)|$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x, y \in [0, 1], |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta} |x - y|$$

La fonction $\psi_{\alpha, \beta}$ est alors lipschitzienne sur $[0, 1]$.

- b) Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{k}{n}\right) dt$$

et

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \psi_{\alpha, \beta}(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \psi_{\alpha, \beta}(t) dt$$

Par suite, puisque pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $|t - \frac{k}{n}| = t - \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n}$ et du fait que $\psi_{\alpha, \beta}$ est $A_{\alpha, \beta}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$, on aura

$$\begin{aligned} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{k}{n}\right) - \psi_{\alpha, \beta}(t) \right) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| \psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{k}{n}\right) - \psi_{\alpha, \beta}(t) \right| dt \\ &\leq A_{\alpha, \beta} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt \\ &\leq A_{\alpha, \beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right)^2 = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n} \end{aligned}$$

- c) Rappelons que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} n^{\alpha-1} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} n^{\beta-1} x^n$ est 1. Le produit de Cauchy de ces deux séries a pour rayon de convergence au moins 1. Donc pour $x \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} S_\alpha(x) S_\beta(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\beta-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1} (n-k)^{\beta-1} \right) x^n \end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1} (n-k)^{\beta-1} = 0$ pour $n = 0$ ou $k = n$. Alors,

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\beta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha-1} (n-k)^{\beta-1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1} \right) n^{\alpha+\beta-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n \end{aligned}$$

Dans l'énoncé, la somme commence de 0, alors que $u_0(\alpha, \beta)$ n'est pas définie !

Toujours pour $0 \leq x < 1$, ce qui assure l'absolue convergence des séries ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned}
|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n - B(\alpha, \beta) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} x^n \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)) n^{\alpha+\beta-1} x^n \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| n^{\alpha+\beta-1} x^n \\
&\leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2} x^n}_{S_{\alpha+\beta-1}(x)} \text{ (d'après II.B.2))}
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question **II.B.2) b)**, lorsque x tend vers 1 et $x < 1$, on a :

$$(1-x)^{\alpha+\beta} S_{\alpha+\beta-1}(x) \sim (1-x)^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{(1-x)^{\alpha+\beta-1}} = (1-x)\Gamma(\alpha+\beta-1) \longrightarrow 0$$

D'une autre part, par la même question, l'expression :

$$(1-x)^{\alpha+\beta} |S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| = |(1-x)^\alpha S_\alpha(x)(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)(1-x)^{\alpha+\beta} S_{\alpha+\beta}(x)|$$

tend, lorsque x tend vers 1 et $x < 1$, vers $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha+\beta)|$ et en même temps vers 0. Alors,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

III.C) Formule des compléments.

III.C.1) Posons $B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^1 g(\alpha, t) dt$ où g est la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(\alpha, t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}$.

La fonction g est :

- clairement continue (et positive) sur $]0, 1[$,
- pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto g(\alpha, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- pour tout segment $[u, v]$ de $]0, 1[$ et pour tout α de ce segment, on a, puisque $0 < t < 1$ et $0 < 1-t < 1$,

$$|g(\alpha, t)| = t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha} \leq t^{u-1}(1-t)^{-v}$$

En plus la fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{-v}$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question **III-A.1)** (en prenant $\alpha = u, \beta = 1-v$ dans la question **III-A.1)**)

La fonction $t \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est donc continue sur $]0, 1[$ par le théorème de la convergence dominée.

III.C.2) Soient p et q deux entiers vérifiant : $0 < p < q$.

a) L'inégalité $p < q$ se traduit par $p+1 \leq q$, donc $2p+2 \leq 2q$ ou encore $2p+1 < 2q$. Ceci montre que $0 < \frac{2p+1}{2q} < 1$. La relation (ii) donne :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+t} dt$$

Pour $0 < u < v$ et avec le changement de variables $s = t^{\frac{1}{2q}}$ ou encore $t = s^{2q}$ et $dt = 2qs^{2q-1}ds$:

$$\begin{aligned}
\int_u^v \frac{t^{-\frac{2p+1}{2q}}}{1+t} dt &= \int_{u^{\frac{1}{2q}}}^{v^{\frac{1}{2q}}} \frac{s^{2p+1-2q}}{1+s^{2q}} 2qs^{2q-1} ds \\
&= 2q \int_{u^{\frac{1}{2q}}}^{v^{\frac{1}{2q}}} \frac{s^{2p}}{1+s^{2q}} ds
\end{aligned}$$

Puis on fait tendre u vers 0 et v vers $+\infty$ pour obtenir :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$$

- b) Pour $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, on note $z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$. On remarque que $z_0, \dots, z_{q-1}$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $1 + X^{2q}$ et de même pour $-z_0, \dots, -z_{q-1}$. En plus, s'il existe k, l tels que $0 \leq k \leq l \leq q-1$ tels que $z_k = -z_l$, alors $-1 = e^{i\frac{(l-k)}{q}\pi}$. Cette égalité n'est possible que si $\frac{l-k}{q}$ est un entier impair et ce n'est pas le cas car $0 \leq l-k < q-1$. Donc les racines du polynôme $1 + X^{2q}$ sont $z_0, \dots, z_{q-1}, -z_0, \dots, -z_{q-1}$ qui sont aussi les pôles simples de la fraction rationnelle $\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}}$, qui est sous-forme irréductible et de degré strictement négatif. Sa décomposition est :

$$\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}} = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{a_k}{X - z_k} + \frac{b_k}{X + z_k} \right)$$

avec $a_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$, $b_k = \frac{P(-z_k)}{Q'(-z_k)}$, $P = X^{2p}$ et $Q = 1 + X^{2q}$. Donc, avec $z_k^{2q} = -1$,

$$a_k = \frac{z_k^{2p}}{2qz_k^{2q-1}} = \frac{z_k^{2p+1}}{-2q} \text{ et } b_k = \frac{(-z_k)^{2p}}{2q(-z_k)^{2q-1}} = \frac{-z_k^{2p+1}}{-2q}$$

Enfin,

$$\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{X - z_k} - \frac{1}{X + z_k} \right)$$

- c) Soit c un nombre complexe de partie imaginaire b non nulle et de partie réelle a . Pour t un nombre réel,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - c} &= \frac{1}{t - a - ib} \\ &= \frac{t - a + ib}{(t - a)^2 + b^2} \\ &= \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} + \frac{i}{b} \frac{1}{(\frac{t-a}{b})^2 + 1} \end{aligned}$$

Sous-cette forme, on voit bien qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t - c}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier est donnée par $t \mapsto \frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{t - a}{b}\right)$. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{t - z_k} - \frac{1}{t + z_k} \right)$$

Puisque z_k n'est pas un réel, d'après ce qui précède, une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ est ϕ telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) &= -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{2} \ln((t - \operatorname{Re}(z_k))^2 + \operatorname{Im}(z_k)^2) + i \arctan\left(\frac{t - \operatorname{Re}(z_k)}{\operatorname{Im}(z_k)}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln((t + \operatorname{Re}(z_k))^2 + \operatorname{Im}(z_k)^2) - i \arctan\left(\frac{t + \operatorname{Re}(z_k)}{-\operatorname{Im}(z_k)}\right) \right) \\ &= -i \frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\arctan\left(\frac{t - \operatorname{Re}(z_k)}{\operatorname{Im}(z_k)}\right) + \arctan\left(\frac{t + \operatorname{Re}(z_k)}{\operatorname{Im}(z_k)}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(t - \operatorname{Re}(z_k))^2 + \operatorname{Im}(z_k)^2}{(t + \operatorname{Re}(z_k))^2 + \operatorname{Im}(z_k)^2}\right) \right) \end{aligned}$$

D'une autre part, pour tout entier $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, on a $0 < \frac{2k+1}{2q}\pi < \pi$ et donc $\operatorname{Im}(z_k) > 0$. En particulier, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = 0$. Soient maintenant u et v deux réels tels que $0 < u < v$.

$$\int_u^v \frac{t^{2p}}{2q+1} dt = \int_u^v \varphi(t) dt = \phi(v) - \phi(u)$$

Lorsque u tend vers 0 et v vers $+\infty$, on aura :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} dt = \lim_{v \rightarrow +\infty} \phi(v) - \lim_{t \rightarrow 0} \phi(u) = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = -i \frac{\pi}{2q} S$$

avec $S = \sum_{k=0}^{q-1} z^{2k+1}$ et $z = e^{i \frac{2p+1}{2q} \pi}$. On a $z^{2q} = -1$ donc $z^2 \neq 1$ et

$$z^2 S = \sum_{k=0}^{q-1} z^{2k+3} = \sum_{k=1}^q z^{2k+1} = S - 2z$$

Par suite, $S = \frac{2z}{1-z^2} = 2 \frac{e^{i \frac{2p+1}{2q} \pi}}{1 - e^{i \frac{2p+1}{q} \pi}} = 2 \frac{e^{i \frac{2p+1}{2q} \pi}}{-2i \sin\left(\frac{2p+1}{2q} \pi\right) e^{i \frac{2p+1}{2q} \pi}} = \frac{1}{-i \sin\left(\frac{2p+1}{2q} \pi\right)}$. D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q} \pi\right)}$$

III.C.3) Soit $\alpha \in]0, 1[$. On sait, d'après III-B), que

$$\Gamma(\alpha, 1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha) \Gamma(\alpha+1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha) \Gamma(1) = B(\alpha, 1-\alpha)$$

Maintenant, pour $\varepsilon > 0$, on choisit q entier tel que $q > 1$ et $\frac{1}{q} < \varepsilon$ et on pose $p = [q\alpha]$ la partie entière de $q\alpha$ de sorte que : $\frac{2p}{2q} \leq \alpha < \frac{2p+2}{2q}$ et $\frac{2p}{2q} \leq \frac{2p+1}{2q} < \frac{2p+2}{2q}$. Donc $\frac{p}{q} < 1$ et

$$\left| \frac{2p+1}{2q} - \alpha \right| < \frac{2p+2}{2q} - \frac{2p}{2q} = \frac{1}{q} < \varepsilon$$

En d'autres termes, l'ensemble $A = \left\{ \frac{2p+1}{2q} ; 0 < p < q \text{ et } p, q \text{ entiers} \right\}$ est dense dans $]0, 1[$. Pour $\beta = \frac{2p+1}{2q} \in A$, on a :

$$\begin{aligned} B(\beta, 1-\beta) &= 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} dt \quad \text{d'après III-C.2.a)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q} \pi\right)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} \end{aligned}$$

La fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha) - \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ étant continue, par la question **III-C.1)**, sur $]0, 1[$ et identiquement nulle sur A qui est dense dans $]0, 1[$. Elle est donc identiquement nulle sur $]0, 1[$. C'est à dire que :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie IV - L'opérateur d'Abel

Dans cette partie, α est un réel de $]0, 1[$.

IV.A) -

IV.A.1) Soit f un élément de E . La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée et pour tout x de $]0, 1]$ et tout t de $]0, x[$, on a :

$$\left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$$

En plus, la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$ est continue et intégrable sur $]0, x[$ car $\alpha < 1$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $]0, x[$.

IV.A.2) Pour $f \in E$, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$A_\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a) Soit f un élément de E et x un élément de $[0, 1]$. L'égalité :

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$$

est vraie pour $x = 0$. Supposons que $x > 0$ et soit $y \in]0, x[$. Avec le changement de variables $t = sx$, on aura :

$$\int_0^y \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = \int_0^{\frac{y}{x}} \frac{f(sx)}{(x-sx)^\alpha} x ds = x^{1-\alpha} \int_0^{\frac{y}{x}} \frac{f(sx)}{(1-s)^\alpha} ds$$

puis on fait tendre y vers x pour obtenir $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$.

b) La fonction $(t, x) \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, 1[\times [0, 1]$. Pour tout x de $[0, 1]$, on a $\left| \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ et la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue et intégrable sur $[0, 1[$. Donc la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$ est continue sur $[0, 1]$ ce qui montre, par le théorème de la convergence dominée, la continuité de la fonction : $A_\alpha f : x \mapsto x^{1-\alpha} g(x)$ sur $[0, 1]$.

c) l'application A_α est linéaire par linéarité de l'intégrale et pour tout f de E , $A_\alpha f$ est continue. Donc A_α est un endomorphisme de E . Soit maintenant f un élément de E . Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|A_\alpha f(x)| = x^{1-\alpha} \left| \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt \right| \leq x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \leq x^{1-\alpha} \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha}$$

D'un autre coté,

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^y \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{y \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{(1-y)^{1-\alpha}} \right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

Par suite, $|A_\alpha f(x)| \leq x^{1-\alpha} \frac{\|f\|}{1-\alpha} \leq \frac{\|f\|}{1-\alpha}$ et donc A_α est continue et $\|A_\alpha\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$. Mais pour $f = 1$ la fonction constante, on a $\|f\| = 1$ et $\|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$. Ceci montre que $\|A_\alpha\| = \frac{1}{1-\alpha}$.

IV.B) On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n \geq 0}$ par :

$$A_\alpha^n = \begin{cases} \text{id}_E & \text{si } n = 0, \\ A_\alpha \circ A_\alpha^{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1 - \alpha$.

a) Soit $n \geq 1$ un entier. Si $n = 1$, on a montré que : $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha f(x)| \leq x^{1-\alpha} \frac{\|f\|}{1-\alpha} = \frac{x^\beta \|f\|}{\beta}$ et, puisque $\Gamma(1 + \beta) = \beta \Gamma(\beta)$, on a :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha f(x)| \leq \frac{x^\beta \|f\|}{\beta} = \frac{x^\beta \Gamma(\beta)}{\Gamma(1 + \beta)} \|f\|$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 1$. L'entier $n \geq 1$ étant fixé, supposons que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1 + n\beta)} \|f\|$$

Alors, pour tout f de E et tout x de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |A_\alpha^{n+1} f(x)| &= x^\beta \left| \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt \right| \\ &\leq x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \\ &\leq x^\beta \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1 + n\beta)} \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} dt \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que $\int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} dt = B(1+n\beta, \beta) = \frac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)}$. On remplace l'intégrale dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$|A_\alpha^{n+1}f(x)| \leq \frac{x^{(n+1)\beta}(\Gamma(\beta))^{n+1}}{\Gamma(1+(n+1)\beta)} \|f\|$$

b) A_α^n est composé d'endomorphismes continus de E , c'est bien un endomorphisme continu. La majoration de sa norme est conséquence immédiate de la question précédente.

IV.B.2) Soient ε deux réels strictement positifs. D'après la question **I.3**), il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $((\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta})^x \leq \varepsilon\Gamma(x)$. Donc pour n entier avec $n \geq \frac{A}{\beta}$, on a par croissance de Γ et par le fait que $x = n\beta \geq A$:

$$\gamma^n(\Gamma(\beta))^n = ((\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta})^x \leq \varepsilon\Gamma(x) \leq \varepsilon\Gamma(1+n\beta)$$

C'est à dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

IV.B.3) Soit λ un nombre complexe non nul et f un élément de E .

a) On a pour tout n entier naturel non nul, d'après la question **IV-B.1)**

$$\|(1+|\lambda|)^n \lambda^n A_\alpha^n f\| \leq (1+|\lambda|)^n |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

Donc, avec cette majoration et la question **IV-B.2)**, on a $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| = o\left(\frac{1}{1+|\lambda|}\right)^n$. Puisque λ est non nul, donc $1+|\lambda| > 1$ et la série $\sum_{n \geq 0} \lambda^n A_\alpha^n f$ est normalement convergente et donc uniformément

convergente sur $[0, 1]$.

Notons g sa somme.

b)

$$\begin{aligned} \lambda A_\alpha g &= \lambda A_\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} A_\alpha^{n+1} f \quad (A_\alpha \text{ est continu}) \\ &= g - f \end{aligned}$$

Donc $(\text{id}_E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c) D'après la question précédente, l'opérateur $\text{id}_E - \lambda A_\alpha$ est surjectif. Soit f un élément du noyau de $\text{id}_E - \lambda A_\alpha$. Alors, $\lambda A_\alpha f = f$. Par simple récurrence sur n , on aura pour tout n , $\lambda^n A_\alpha^n f = f$. Pour x élément de $[0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} \lambda^n A_\alpha^n f(x) = \sum_{n \geq 0} f(x)$ est convergente. Donc $f(x) = 0$. L'opérateur $\text{id}_E - \lambda A_\alpha$ est injectif. Il est donc inversible. Son inverse $(\text{id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1}$ appliqué à un élément f quelconque de E est $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right)(f)$, par définition de $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$. En d'autres termes,

$$(\text{id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

IV.C) Pour tout n entier naturel, on note e_n la fonction $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) a) Soit n un entier naturel et x un élément de $[0, 1]$.

$$A_\alpha e_n(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{x^n t^n}{(1-t)^\alpha} dt = x^{n+\beta} B(1+n, \beta)$$

b) De même,

$$\begin{aligned}
A_{1-\alpha} \circ A_\alpha e_n(x) &= B(1+n, \beta) x^\alpha \int_0^1 \frac{x^{n+\beta} t^{n+\beta}}{(1-t)^{1-\alpha}} dt \\
&= B(1+n, \beta) B(1+\beta+n, \alpha) x^{n+1} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} \frac{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\beta+\alpha)} x^{n+1} \quad (\text{d'après III-B})
\end{aligned}$$

Rappelons que $\alpha + \beta = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ et, par **III-C.3**, $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Donc :

$$A_{1-\alpha} \circ A_\alpha e_n = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{e_{n+1}}{n+1}$$

IV.C.2) Notons $\mathcal{P}$ le sous-espace de E formé des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$. La famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base de $\mathcal{P}$. Les opérateurs linéaires P et $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ coïncident sur les éléments de cette base. Ils coïncident donc sur $\mathcal{P}$.

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) P est linéaire et pour tout f de E , Pf est une primitive de f sur $[0, 1]$ et donc Pf est continue. C'est à dire que P est un endomorphisme de E . En plus,

$$|Pf(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\| dt = \|f\|$$

Ceci montre que P est continu et que $\|P\| \leq 1$. Pour $f = 1$, on a $\|f\| = 1$ et $Pf(x) = x$, donc $\|Pf\| = 1 = \|f\|$ et ceci prouve que $\|P\| = 1$.

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. L'opérateur B_α est continu comme composé d'opérateurs continus. D'après la question précédente, l'opérateur $B_\alpha - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$ est continu et, d'après IV-C.2), nul sur $\mathcal{P}$. d'une autre part, le théorème de Weirstrass montre que $\mathcal{P}$ est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$. Donc $B_\alpha - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$ nul sur E et $B_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$.

c) Pour f un élément de E , on sait que f est continue sur $[0, 1]$ et que Pf est une primitive de f sur $[0, 1]$. Alors, Pf est continûment dérivable sur $[0, 1]$ et $DPf = f$. En d'autres termes, $D \circ P$ est bien défini et $D \circ P = \text{id}_E$. Mais par la question précédente, $B_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$, donc $D \circ B_\alpha$ est bien défini et il égal à $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \text{id}_E$.

d) Soit f un élément de E tel que $A_\alpha f = 0_E$. Alors, $B_\alpha f = A_{1-\alpha} A_\alpha f = A_{1-\alpha} 0_E = 0_E$ puis on compose de nouveau par D et on trouve :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} f = 0_E \text{ et donc } f = 0_E$$

ce qui montre que A_α est injectif.

(On ne peut pas composer directement par $D \circ A_{1-\alpha}$ tant qu'on n'a pas encore montré son existence.)