

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Thème : étude de la meilleure approximation sur $]0, 1[$ d'une fonction f donnée par une fonction constante c , au sens des moindres carrés dans la première partie, puis au sens de la moindre moyenne dans le reste du problème. On apprend, dans le cas f monotone par morceaux, que c est une constante approchant au mieux f au sens de la moindre moyenne si et seulement si les ensembles $\{t \in]0, 1[\text{ tq } f(t) < c\}$ et $\{t \in]0, 1[\text{ tq } f(t) \leq c\}$ ont des mesures encadrant $\frac{1}{2}$ (3ème partie), que c est unique si de plus f est continue, et que l'application $f \mapsto c$ est en quelque sorte continue par rapport à f (4ème partie). Problème très intéressant, progressif et sans difficulté insurmontable.

Première partie

Question 1.

$0 \leq w_n(a_n - 1)^2 + w_n(a_n + 1)^2 = 2w_na_n^2 + 2w_n$, terme général d'une série convergente, donc $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(a_n - 1)^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(a_n + 1)^2$ convergent, et par différence, $\sum_{n=0}^{\infty} 4w_na_n$ converge aussi. On en déduit par linéarité que la série définissant $D_a(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} w_na_n^2$ et $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} w_na_n$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_na_n^2 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} w_na_n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \alpha - \beta^2 + (x - \beta)^2.$$

Ainsi, $D_a(x)$ est minimal pour $x = \beta$ et $\min D_a = \alpha - \beta^2$, quantité positive vu la définition de D_a .

Question 2.

Les calculs sont analogues. On obtient pour $x \in \mathbb{R}$:

$$D_f(x) = \int_{t=0}^1 f^2(t) dt - \left(\int_{t=0}^1 f(t) dt \right)^2 + \left(x - \int_{t=0}^1 f(t) dt \right)^2,$$

et D_f est minimale pour $x = \int_{t=0}^1 f(t) dt$, avec $\min D_f = \int_{t=0}^1 f^2(t) dt - \left(\int_{t=0}^1 f(t) dt \right)^2 \geq 0$.

Deuxième partie

Question 3.

L'intégrale définissant Δ converge par inégalité triangulaire.

Question 4a.

Convexité : soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t, \tau \in [0, 1]$. On a, par inégalité triangulaire :

$$|f(t) - \tau x - (1 - \tau)y| = |\tau(f(t) - x) + (1 - \tau)(f(t) - y)| \leq \tau|f(t) - x| + (1 - \tau)|f(t) - y|.$$

En intégrant par rapport à t on en déduit $\Delta(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau\Delta(x) + (1 - \tau)\Delta(y)$, ce qui prouve la convexité de Δ .

Continuité : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, 1[$ on a $||f(t) - x| - |f(t) - y|| \leq |x - y|$, ce qui montre, en intégrant par rapport à t , que Δ est 1-lipschitzienne et donc continue. On peut aussi remarquer que la convexité sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité, mais ce dernier résultat n'est pas explicitement au programme de MP*.

Question 4b.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, 1[$ on a $|f(t) - x| \geq |x| - |f(t)|$ d'où $\Delta(x) \geq |x| - \int_{t=0}^1 |f(t)| dt \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$.

Question 5.

Soit $K = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leq \Delta(0)\}$. K est un fermé de $\mathbb{R}$ par continuité de Δ , non vide par construction, et K est borné d'après la question précédente. Donc K est compact et $\Delta|_K$ admet un minimum $V \leq \Delta(0)$. On a alors $\Delta(x) \geq V$ pour tout $x \in K$ par définition de V , et aussi $\Delta(x) \geq \Delta(0) \geq V$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus K$ par définition de K . Ceci prouve que $\min \Delta = V$. Par ailleurs, $M = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) = V\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leq V\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle (et même un segment par compacité).

Question 6a.

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad \text{d'où } V = \frac{1}{2} \text{ et } M = [0, 1].$$

Question 6b.

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} - x + x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad \text{d'où } V = \frac{1}{4} \text{ et } M = \{\frac{1}{2}\}.$$

Troisième partie**Question 7.**

f étant monotone par morceaux, $f^{-1}(J)$ est union d'un nombre fini d'intervalles donc χ_J est une fonction en escalier.

Question 8a.

Si J_1, J_2 sont deux intervalles disjoints dont la réunion est un intervalle alors $\chi_{J_1 \cup J_2} = \chi_{J_1} + \chi_{J_2}$, d'où l'on déduit $\lambda(J_1 \cup J_2) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2)$ par intégration. Le cas général se traite de même ou s'en déduit par récurrence.

Question 8b.

Soit (J_n) une suite croissante d'intervalles et $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Alors la suite de fonctions (χ_{J_n}) converge simplement en croissant vers χ_J , donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone.

Question 8c.

Même raisonnement, la suite (χ_{J_n}) étant ici décroissante.

Question 9a.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} |f - x| &= (x - f)\chi_{J_1} + (f - x)\chi_{J_2} + (f - x)\chi_{J_3}, \\ |f - x - \varepsilon| &= (x + \varepsilon - f)\chi_{J_1} + (x + \varepsilon - f)\chi_{J_2} + (f - x - \varepsilon)\chi_{J_3} \end{aligned}$$

(égalité entre fonctions de $t \in]0, 1[$). En soustrayant membre à membre puis en intégrant sur $]0, 1[$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(x + \varepsilon) - \Delta(x) &= \int_{t=0}^1 \varepsilon \chi_{J_1}(t) dt + \int_{t=0}^1 (2x - 2f(t) + \varepsilon) \chi_{J_2}(t) dt + \int_{t=0}^1 (-\varepsilon) \chi_{J_3}(t) dt \\ &= \varepsilon(\lambda(J_1) + \lambda(J_2) - \lambda(J_3)) + 2 \int_{t=0}^1 (x - f(t)) \chi_{J_2}(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation demandée.

Question 9b.

On a $-\varepsilon\chi_{J_2} \leq (x - f)\chi_{J_2} \leq 0$ (inégalité entre fonctions de t) d'où :

$$\left| \frac{\Delta(x + \varepsilon) - \Delta(x)}{\varepsilon} - \lambda(J_1) + \lambda(J_3) \right| \leq \lambda(J_2)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$. Dans cette inégalité, J_1 est fonction de x seul, et J_2, J_3 sont fonction de x et ε . On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on considère une suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant. La suite des intervalles J_2 correspondants est décroissante d'intersection vide, et la suite des intervalles J_3 est croissante de réunion $K =]x, +\infty[$. D'après les questions **8b** et **8c** on a donc $\lambda(J_2) \rightarrow 0$ et $\lambda(J_3) \rightarrow \lambda(K)$. Ceci prouve que :

$$\frac{\Delta(x + \varepsilon_n) - \Delta(x)}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(]-\infty, x]) - \lambda(]x, +\infty[).$$

Cette limite ayant lieu pour toute suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant, on en déduit :

$$\frac{\Delta(x + \varepsilon) - \Delta(x)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda(]-\infty, x]) - \lambda(]x, +\infty[),$$

par une adaptation immédiate de la caractérisation séquentielle des limites. Ainsi, Δ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_d(x) = \lambda(]-\infty, x]) - \lambda(]x, +\infty[)$.

Question 9c.

En remplaçant f par $-f$ et x par $-x$ dans le raisonnement précédent, on a de même : Δ est dérivable à gauche sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_g(x) = \lambda(]-\infty, x]) - \lambda(]x, +\infty[)$.

Question 9d.

On a $\Delta'_d(x) - \Delta'_g(x) = 2\lambda(\{x\})$ donc Δ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $f(t) = x$ admet un nombre fini de solutions (sachant que f est monotone par morceaux). Les exemples étudiés au **6** confirment ce résultat.

Question 10a.

D'après **8b** et **8c**, on a $\phi(x + 0) = \phi(x)$ et $\phi(x - 0) = \lambda(]-\infty, x]) = \phi(x) - \lambda(\{x\})$.

Question 10b.

On note $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \phi(x) \geq \frac{1}{2}\}$. $\phi(x) = \lambda(]-\infty, x])$ est clairement une fonction croissante de x , est continue à droite d'après la question précédente, et $\phi(-n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc A est un intervalle minoré contenant sa borne inférieure : $A = [\alpha, +\infty[$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

De même, $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda(]-\infty, x]) \leq \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda([x, +\infty[) \geq \frac{1}{2}\}$ est un intervalle de la forme $]-\infty, \beta]$ pour un certain réel β . Donc $N = A \cap B$ est un intervalle, et s'il est non vide alors $N = [\alpha, \beta]$ est fermé borné.

Remarque : s'il existe x tel que $\beta < x < \alpha$ alors on a $\lambda(]-\infty, x]) < \frac{1}{2} < \lambda(]-\infty, x])$, ce qui est absurde. Ceci prouve que l'on a en fait $\alpha \leq \beta$, d'où $N \neq \emptyset$.

Question 10c.

On conserve les notations de la réponse précédente. Si $x < \alpha$ alors $\lambda(]-\infty, x]) < \frac{1}{2}$ d'où $\Delta'_d(x) < 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a $\Delta(x + \varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$. De même, si $x > \beta$ alors $\Delta'_g(x) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a $\Delta(x - \varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$ encore. Ceci prouve que $M \subset [\alpha, \beta] = N$.

Lorsque $\alpha = \beta$ on a alors $M = N$ car $M \neq \emptyset$.

Lorsque $\alpha < \beta$, si $\alpha < x < y < \beta$ alors on a $\frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq \phi(y - 0) \leq \frac{1}{2}$, d'où $\phi(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, ϕ est constante sur $]\alpha, \beta[$ et donc $\phi(x - 0) = \phi(x) = \frac{1}{2}$ (ceci répond à la dernière partie de la question). De plus, $\Delta'_g(x) = \Delta'_d(x) = 0$: Δ est constante sur $[\alpha, \beta]$. La valeur constante en question est V puisque $M \subset [\alpha, \beta]$, d'où $M = [\alpha, \beta] = N$ dans ce cas encore.

Quatrième partie

Question 11a.

Si $x \notin f(I)$ alors, f étant continue, on a $f(I) \subset]-\infty, x[$ ou $f(I) \subset]x, +\infty[$. Dans le premier cas, on a $\Delta'_g(x) = 1$ d'où $\Delta(x - \varepsilon) < \Delta(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, donc $x \notin M_f$. Dans le second cas on a $\Delta'_d(x) = -1$ et on conclut de même.

Question 11b.

Si M_f n'est pas réduit à un point, alors c'est un intervalle non trivial $[\alpha, \beta]$ et ϕ est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle. $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs vaut $\frac{1}{2}$, et ces intervalles sont des fermés relatifs de $]0, 1[$ par continuité de f . De même, $f^{-1}(]-\infty, \beta])$ est une réunion finie d'intervalles fermés relatifs de $]0, 1[$, qui contiennent les intervalles constituant $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$, et dont la somme des longueurs vaut aussi $\frac{1}{2}$. Ceci implique $f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = f^{-1}(]-\infty, \beta])$ donc les réels $x \in]\alpha, \beta[$ n'ont pas d'antécédants par f , ce qui contredit l'inclusion $M_f \subset f(I)$.

Question 11c.

On a $V_f = \min \Delta \leq \Delta(0) = \int_{t=0}^1 |f(t)| dt$.

Soit $L = \int_{t=0}^1 |f(t)| dt$. Pour $|x| > 2L$ on a : $\int_{t=0}^1 |f(t) - x| dt \geq \int_{t=0}^1 (|x| - |f(t)|) dt > L \geq V_f$, donc $x \neq m_f$. Par contraposée, $m_f \leq 2 \int_{t=0}^1 |f(t)| dt$.

Question 12.

D'après la question précédente, $|m_n| \leq 2\|g_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\|g\|_1$ donc la suite (m_n) est bornée, et elle admet des valeurs d'adhérence. Soit $m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n_k}$ l'une de ces valeurs d'adhérence. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\|g - x\|_1 - \|g - m_{n_k}\|_1 \geq (\|g_{n_k} - x\|_1 - \|g - g_{n_k}\|_1) - (\|g_{n_k} - m_{n_k}\|_1 + \|g - g_{n_k}\|_1) \geq -2\|g - g_{n_k}\|_1.$$

En faisant tendre k vers l'infini on obtient $\|g - x\|_1 \geq \|g - m\|_1$ ce qui prouve que $m \in M_g$.

* *
*