

Première partie

1. On a $\varphi_0(j) = 1$ pour tout j . On peut supposer $k \geq 1$.

→ Pour $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, j est racine de φ_k donc $\varphi_k(j) = 0$.

→ Pour $j \geq k$, $\varphi_k(j) = \frac{1}{k!} j(j-1) \cdots (j-k+1) = \frac{1}{k!} \frac{j!}{(j-k)!} = \binom{j}{k}$; ainsi $\varphi_k(j) = \binom{j}{k}$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.

→ Pour $j < k$ on pose $j = -p$ avec $p > 0$, alors

$$\varphi_k(j) = \frac{1}{k!} (-p)(-p-1) \cdots (-p-k+1) = \frac{(-1)^k}{k!} p(p+1) \cdots (p+k-1) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{p+k-1!}{(p-1)!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}^{(1)}.$$

2. On a $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(n-X)$ car $\varphi_{n-k} = 0$ pour $k > n$; $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = X$ et $\varphi_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.

$$\text{a) } P_0 = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(n-X) = \varphi_0(X) \varphi_0(N-X) = 1.$$

$$P_1 = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(n-X) = \varphi_0(X) \varphi_1(N-X) - \varphi_1(X) \varphi_0(N-X) = N - 2X$$

$$P_2 = \varphi_0(X) \varphi_2(N-X) - \varphi_1(X) \varphi_1(N-X) + \varphi_2(X) \varphi_0(N-X) = 2X^2 - NX + \frac{1}{2}N(N-1)$$

b) φ_k est de degré k et de coefficient dominant $\frac{1}{k!}$.

Alors $\varphi_p(N-X) = \frac{1}{p!} (N-X)^p + a_{p-1} (N-X)^{p-1} + \cdots$ est de degré p et de coefficient dominant $\frac{(-1)^p}{p!}$. Ainsi

$(-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(n-X)$ est de degré $k + (n-k) = n$ et de coefficient dominant $(-1)^k \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \binom{n}{k}$.

Donc P_n est de degré au plus n et le coefficient de X^n est $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{n!} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n}{n!} 2^n$:

P_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!} 2^n$

$$\text{c) } P_n(j) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \varphi_k(j) \varphi_{n-k}(N-j) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k} \text{ d'après 1..}$$

$$\text{3. } f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j) u^n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k} u^n = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{j}{k} \left(\sum_{n=0}^N \binom{N-j}{n-k} u^n \right)$$

Or $\binom{j}{k} = 0$ pour $k > j$, $\binom{N-j}{n-k} = 0$ pour $n < k$ et $\binom{N-j}{p} = 0$ pour $p \geq N-j$ donc

$$f_j(u) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \left(\sum_{n=k}^N \binom{N-j}{n-k} u^n \right) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \left(\sum_{p=0}^{N-k} \binom{N-j}{p} u^{p+k} \right) \text{ avec } N-j \leq N-k$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u^k \left(\sum_{p=0}^{N-j} \binom{N-j}{p} u^p \right) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u^k (1+u)^{N-j} = (1-u)^j (1+u)^{N-j}.$$

$$\begin{aligned} \text{4. a) } F(u, v) &= \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v) = \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} ((1-u)(1-v))^j ((1+u)(1+v))^{N-j} \\ &= ((1-u)(1-v) + (1+u)(1+v))^N = (2 + 2uv)^N = 2^N (1 + uv)^N \end{aligned}$$

(1) Les φ_k sont appelés polynômes de Newton ; on voit que $\varphi_k(j)$ est entier pour tout $j \in \mathbf{Z}$.

b) On suppose $0 \leq b < a \leq N$: on a $\frac{\partial^a F}{\partial u^a}(u, v) = 2^N v^a \frac{N!}{(N-a)!} (1+uv)^{N-a}$.

On pose $P_{a,u}(v) = \frac{\partial^a F}{\partial u^a}(u, v)$ considéré comme polynôme en v .

0 est racine d'ordre a de $P_{a,u}$ donc, pour $b \leq a$, $0 = (P_{a,u})^{(b)}(0)$.

Ainsi $\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(u, 0) = 0$ pour tout u ; en particulier $\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0) = 0$.

Dans le cas $a < b$ on a la même démonstration. Pour le cas $a = b$ on va appliquer la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0, 0) &= \frac{\partial^a}{\partial v^a} \left(2^N v^a \frac{N!}{(N-a)!} (1+uv)^{N-a} \right) (0, 0) \\ &= 2^N \frac{N!}{(N-a)!} \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} \frac{\partial^k v^a}{\partial v^k}(0, 0) \frac{\partial^{a-k} (1+uv)^{N-a}}{\partial v^{a-k}}(0, 0) \text{ or } \frac{\partial^k v^a}{\partial v^k}(0, 0) = 0 \text{ pour } k < a \\ &= 2^N \frac{N!}{(N-a)!} \binom{a}{a} \frac{\partial^a v^a}{\partial v^a}(0, 0) (1+uv)^{N-a}(0, 0) = 2^N \frac{N!a!}{(N-a)!} \end{aligned}$$

5. a) On a $\langle P \mid Q \rangle = \langle Q \mid P \rangle$, $\langle P \mid aQ + bR \rangle = a\langle P \mid Q \rangle + b\langle P \mid R \rangle$ et $\langle P \mid P \rangle = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} (P(j))^2 \geq 0$ car $\binom{N}{j} > 0$. Si on a $\langle P \mid P \rangle = 0$ alors $(P(j))^2 = 0$ pour tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ donc P admet N racines distinctes ; comme P appartient à $\mathbf{R}_N[X]$ on en déduit que $P = 0$.
Ainsi $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

b) La définition $f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j)u^n$ implique $\frac{d^n f_j}{u^n}(0) = n!P_n(j)$. Ainsi

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(u, v) = \frac{\partial^b}{\partial v^b} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{\partial^a f_j(u) f_j(v)}{\partial u^a}(u, v) = \frac{\partial^b}{\partial v^b} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{d^a f_j}{du^a}(u) f_j(v) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{d^a f_j}{du^a}(u) \frac{d^b f_j}{dv^b}(v)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{d^a f_j}{du^a}(0) \frac{d^b f_j}{dv^b}(0) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} a!P_a(j)b!P_b(j) = a!b!\langle P_a \mid P_b \rangle.$$

D'après la question **4. b)** on en déduit que⁽²⁾ $\langle P_a \mid P_b \rangle = 0$ pour $a \neq b$: la famille est orthogonale.

6. On a $\frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n-1}$ donc $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n-1} - \sum_{n=1}^N nP_n(j)u^{n+1}$:

le coefficient de u^n dans $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u)$ est donc $(n+1)P_{n+1}(j) - (n-1)P_{n-1}(j)$ pour $1 \leq n \leq N-1$.

De plus, pour $1 \leq j \leq N-1$, $\frac{df_j}{du}(u) = (-j)(1-u)^{j-1}(1+u)^{N-j} + (N-j)(1-u)^j(1+u)^{N-j-1}$ donc

$$(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u) = (-j(1+u) + (N-j)(1-u))f_j(u) = ((N-2j) - Nu)f_j(u) :$$

le coefficient de u^n dans $(1-u^2)\frac{df_j}{du}(u)$ est aussi $(N-2j)P_n(j) - NP_{n-1}(j)$.

Pour $j = 0$, $(1-u^2)\frac{df_0}{du}(u) = N(1-u)f_0(u)$: le coefficient de u^n est $NP_n(0) - NP_{n-1}(0)$.

Pour $j = N$, $(1-u^2)\frac{df_N}{du}(u) = -N(1+u)f_N(u)$: le coefficient de u^n est $-NP_n(N) - NP_{n-1}(N)$.

On a donc, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, $(N-2j)P_n(j) - NP_{n-1}(j) = (n+1)P_{n+1}(j) - (n-1)P_{n-1}(j)$ donc le polynôme $Q = (n+1)P_{n+1} - (N-2X)P_n + (N-n+1)P_{n-1}$ s'annule en tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$.

On a $P_k \in \mathbf{R}_k[X]$ donc $Q \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$; de plus le coefficient de X^{n+1} est, d'après la question **2. b)**, $(n+1)(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + 2(-1)^n\frac{2^n}{n!} = 0$ donc Q appartient à $\mathbf{R}_n[X]$.

Or Q admet au moins $n+1$ racines distinctes et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$: on en déduit $Q = 0$.

Ainsi, pour tout m tel que $1 \leq m \leq N-1$, $(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0$.

⁽²⁾ Et aussi $\langle P_a \mid P_a \rangle = 2^N \binom{N}{a}$.

Deuxième partie

7. a) $d(I, J) = 0$ est équivalent à $I \Delta J = \emptyset$.

On a $I \Delta J = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$ avec $(I \cap J) \subset (I \cup J)$ donc $d(I, J) = 0$ est équivalent à $(I \cap J) = (I \cup J)$.

Or $(I \cap J) \subset I \subset (I \cup J)$ et $(I \cap J) \subset J \subset (I \cup J)$ donc la condition $(I \cap J) = (I \cup J)$ implique $I = J$.

Inversement si $I = J$ alors $I \Delta J = \emptyset$ donc $[d(I, J) = 0] \iff [I = J]$.

Si $d(I, J) = 1$ alors $I \Delta J$ est un singleton, que l'on note $\{a\}$. On suppose, par exemple, que a appartient à I .

Alors a ne peut pas appartenir à J . De plus $(I \cup J) = (I \cap J) \cup \{a\}$.

On a donc $(I \cap J) \subset J \subset (I \cup J) = (I \cap J) \cup \{a\}$ avec $a \notin J$ donc $J = (I \cap J)$ et

$(I \cap J) \subset I \subset (I \cup J) = (I \cap J) \cup \{a\}$ avec $a \in I$ donc $J = (I \cap J) \cup \{a\} = J \cup \{a\}$.

Inversement si $I = J \cup \{a\}$ avec a n'appartenant pas à J alors $I \Delta J = \{a\}$ donc $d(I, J) = 1$.

$[d(I, J) = 1] \iff [I = J \sqcup \{a\} \text{ ou } J = I \sqcup \{a\}]$ où le symbole $\sqcup$ signifie une union disjointe.

b) Détaillons $I \Delta J$: si $I = (I \cap J) \sqcup I'$ et $J = (I \cap J) \sqcup J'$ alors $I \cup J = (I \cap J) \sqcup I' \sqcup J'$ donc $I \Delta J = I' \sqcup J'$.

Alors $(I \Delta J) \cap I = (I' \sqcup J') \cap ((I \cap J) \sqcup I') = I'$ car $(I \cap J) \cap J' = \emptyset$.

On en déduit que $(I \Delta J) \Delta I = J' \sqcup (I \cap J) = J$ donc $d((I \Delta J), I) = \text{Card} J$.

8. On va classer les parties A telles que $d(A, I) = 1$.

→ Si $A = I \sqcup \{a\}$ avec a appartenant à J . On pose $I = (I \cap J) \sqcup I'$, $J = (I \cap J) \sqcup J'$ et $J' = J'' \sqcup \{a\}$.

On a $A \cap J = (I \cup \{a\}) \cap J = (I \cap J) \cup (\{a\} \cap J) = (I \cap J) \sqcup \{a\}$ car $a \notin (I \cap J) \subset I$ donc

$A = I \sqcup \{a\} = (I \cap J) \sqcup I' \sqcup \{a\} = (A \cap J) \sqcup I'$ et $J = (I \cap J) \sqcup J'' \sqcup \{a\} = (A \cap J) \sqcup J''$.

On en déduit que $A \Delta J = I' \sqcup J''$ et $I \Delta J = I' \sqcup J' = I' \sqcup J'' \sqcup \{a\}$ donc $\text{Card}(I \Delta J) = \text{Card}(A \Delta J) + 1$.

→ Si $A = I \sqcup \{a\}$ avec a n'appartenant pas à J . On pose $I = (I \cap J) \sqcup I'$ et $J = (I \cap J) \sqcup J'$.

On a $A \cap J = (I \cup \{a\}) \cap J = (I \cap J) \cup (\{a\} \cap J) = (I \cap J)$ car $\{a\} \cap J = \emptyset$ donc

$A = I \sqcup \{a\} = (I \cap J) \sqcup I' \sqcup \{a\} = (A \cap J) \sqcup I' \sqcup \{a\}$ et $J = (I \cap J) \sqcup J' = (A \cap J) \sqcup J'$.

On en déduit que $A \Delta J = I' \sqcup \{a\} \sqcup J' = I \Delta J \sqcup \{a\}$ donc $\text{Card}(A \Delta J) = \text{Card}(I \Delta J) + 1$.

→ Si $I = A \sqcup \{a\}$ avec a appartenant à J on est dans le premier cas en échangeant les rôles de A et de I donc $\text{Card}(A \Delta J) = \text{Card}(I \Delta J) + 1$.

→ Si $I = A \sqcup \{a\}$ avec a n'appartenant pas à J on est dans le deuxième cas en échangeant les rôles de A et de I donc $\text{Card}(I \Delta J) = \text{Card}(A \Delta J) + 1$.

Ainsi si $d(A, I) = 1$ alors $d(A, J) = d(I, J) \pm 1$ donc $\gamma_j^k = 0$ si $j \notin \{k-1, k+1\}$.

On a $d(A, J) = d(I, J) - 1$ si et seulement si

— $A = I \sqcup \{a\}$ avec a appartenant à J ; comme a n'appartient pas à I on choisit a dans $J \setminus I$

— $I = A \sqcup \{a\}$ avec a n'appartenant pas à J ; comme a appartient à I on choisit a dans $I \setminus J$

Les ensembles A tels que $d(A, J) = d(I, J) - 1$ sont donc définis par un élément de $J \setminus I \sqcup I \setminus J = I \Delta J$;

il y a $\text{Card}(I \Delta J)$ choix distincts possibles donc $\gamma_{k-1}^k = d(I, J) = k$.

On a $d(A, J) = d(I, J) + 1$ si et seulement si

— $A = I \sqcup \{a\}$ avec a n'appartenant pas à J ; comme a n'appartient pas à I on choisit a dans $E \setminus (I \cup J)$

— $I = A \sqcup \{a\}$ avec a appartenant à J ; comme a appartient à I on choisit a dans $I \cap J$

Les ensembles A tels que $d(A, J) = d(I, J) + 1$ sont donc définis par un élément de $E \setminus I \Delta J$;

il y a $N - \text{Card}(I \Delta J)^{(3)}$ choix distincts possibles donc $\gamma_{k+1}^k = N - d(I, J) = N - k$.

⁽³⁾ Il est normal de trouver une somme égale à N . Pour fabriquer A tel que $d(I, A) = 1$ on choisit un élément de E : s'il appartient à I on l'enlève, s'il n'appartient pas à I on l'ajoute.

Troisième partie

9. a) $d(I, J)$ est le cardinal d'une partie de E donc $d(I, J) \leq \text{Card}E = N$. Pour $n > N$ A_n est la matrice nulle. $d(I, J) = 0$ si et seulement si $I = J$ donc $A_0 = \mathcal{J}$.

b) On a $A_1 A_m = C$ avec $(C)_{pq} = \sum_{r=1}^{2^N} (A_1)_{pr} (A_m)_{rq}$. Comme les coefficients des A_n sont égaux à 1 ou 0 $(C)_{pq}$ est le nombre d'entiers r tels que $(A_1)_{pr} = (A_m)_{rq} = 1$ c'est-à-dire le nombre de parties I_r de E telles que $d(I_p, I_r) = 1$ et $d(I_r, I_q) = m$; avec les notations du 8. on a $(C)_{pq} = \gamma_m^k$ avec $k = d(I_p, I_q)$.
Pour $k = d(I_p, I_q) \neq m \pm 1$ on a $(C)_{pq} = 0$, pour $d(I_p, I_q) = m - 1$ on a $(C)_{pq} = \gamma_m^{m-1} = N - m + 1$ et pour $d(I_p, I_q) = m + 1$ on a $(C)_{pq} = \gamma_m^{m+1} = m + 1$. Ainsi $A_1 A_m = C = (N - m + 1)A_{m-1} + (m + 1)A_{m+1}$.

10. $P_0 = 1$ donc $P_0(A) = \mathcal{J} = A_0$. $P_1 = N - 2X$ donc $P_1(A) = N\mathcal{J} - 2A = N\mathcal{J} - 2\frac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1) = A_1$.
Si on suppose $P_n(A) = A_n$ et $P_{n-1}(A) = A_{n-1}$ pour $1 \leq n \leq N - 1$ alors, en utilisant 6.,
 $(n + 1)P_{n+1}(A) = (N\mathcal{J} - 2A)P_n(A) - (N - n + 1)P_{n-1}(A) = A_1 A_n - (N - n + 1)A_{n-1}$
 $= (N - n + 1)A_{n-1} + (n + 1)A_{n+1} - (N - n + 1)A_{n-1} = (n + 1)A_{n+1}$ d'après 9.b)
Ainsi $P_{n+1}(A) = A_{n+1}$ donc, par récurrence, $P_n(A) = A_n$ pour tout entier $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

11. On classe les parties J de E de cardinal j par le cardinal de leur intersection avec I :
si $\text{Card}(J) = j$ et $\text{Card}(I \cap J) = k$ alors $J = (I \cap J) \sqcup J'$ avec
 $I \cap J$ sous-ensemble à k éléments de I donc peut être choisi parmi $\binom{i}{k}$ possibilités et
 J' sous-ensemble à $j - k$ éléments de $E \setminus I$ donc peut être choisi parmi $\binom{N-i}{j-k}$ possibilités.

il y a donc $\binom{i}{k} \binom{N-i}{j-k}$ tels sous-ensembles : $\sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} J = j, \text{Card}(I \cap J) = k}} (-1)^{\text{Card}(I \cap J)} = \binom{i}{k} \binom{N-i}{j-k} (-1)^k$.

d'où $\sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} J = j}} (-1)^{\text{Card}(I \cap J)} = \sum_{k=0}^i \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} J = j, \text{Card}(I \cap J) = k}} (-1)^{\text{Card}(I \cap J)} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{N-i}{j-k} (-1)^k = P_j(i)$

d'après 2. c) car $\binom{i}{k} = 0$ pour $k > i$.

12. a) On écrit toujours $I = (I \cap J) \sqcup I'$ et $J = (I \cap J) \sqcup J'$. Alors $(I \triangle J) \cap K = (I' \sqcup J') \cap K = (I' \cap K) \sqcup (J' \cap K)$.
Ainsi $(-1)^{\text{Card}((I \triangle J) \cap K)} = (-1)^{\text{Card}(I' \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J' \cap K)}$.
De plus $I \cap K = ((I \cap J) \sqcup I') \cap K = (I \cap J \cap K) \sqcup (I' \cap K)$; de même $J \cap K = (I \cap J \cap K) \sqcup (J' \cap K)$.
Ainsi $(-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)} = (-1)^{\text{Card}(I \cap J \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I' \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I \cap J \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J' \cap K)}$
 $= (-1)^{\text{Card}(I' \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J' \cap K)} = (-1)^{\text{Card}((I \triangle J) \cap K)}$.
b) On note $A = I \triangle J$ et $a = \text{Card}A$. $a = 0$ si et seulement si $I = J$. On utilise 11. et 3..

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)} &= \sum_{K \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(A \cap K)} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K = k}} (-1)^{\text{Card}(A \cap K)} \\ &= \sum_{k=0}^n P_k(a) = f_a(1) = (1 - 1)^a (1 + 1)^{N-a} = \begin{cases} 2^N & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

13. a) Les coefficients de B_k sont $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) (A_n)_{pq}$ or $(A_n)_{pq} = 0$ pour tout n sauf $(A_n)_{pq} = 1$ pour $n = d(I_p, I_q)$: on a donc $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} P_k(d(I_p, I_q))$. De plus $I_p \triangle I_q$ est de cardinal $d(I_p, I_q)$ donc, d'après 11., $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K = k}} (-1)^{\text{Card}((I_p \triangle I_q) \cap K)} = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K = k}} (-1)^{\text{Card}(I_p \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I_q \cap K)}$. Si on note $B_k \cdot B_l = C$ alors $(C)_{pq} = \sum_{r=1}^{2^N} (B_k)_{pr} (B_l)_{rq}$ puis

$$\begin{aligned}
(C)_{pq} &= \sum_{r=1}^{2^N} \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K=k}} (-1)^{\text{Card}(I_p \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I_r \cap K)} \right) \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} L=l}} (-1)^{\text{Card}(I_r \cap L)} (-1)^{\text{Card}(I_q \cap L)} \right) \\
&= \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{I \in \mathcal{P}(E)} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K=k}} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} L=l}} (-1)^{\text{Card}(I_p \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I \cap L)} (-1)^{\text{Card}(I_q \cap L)} \\
&= \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K=k}} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} L=l}} (-1)^{\text{Card}(I_p \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I_q \cap L)} \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I \cap L)}}_{=0 \text{ si } K \neq L \text{ d'après 12. b)}
\end{aligned}$$

Or on ne peut avoir $K = L$ que si $k = l$ donc $B_k \cdot B_l = 0$ si $k \neq l$ et, pour $k = l$,

$$(C)_{pq} = \frac{1}{(2^N)^2} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card} K=k}} (-1)^{\text{Card}(I_p \cap K)} (-1)^{\text{Card}(I_q \cap K)} 2^N = (B_k)_{pq} \text{ donc } (B_k)^2 = B_k.$$

b) B_k est donc une matrice de projecteur donc $\text{rg}(B_k) = \text{tr}(B_k)$.

Or les termes diagonaux de A_n sont nuls pour $n \neq 0$ car $d(I, I) = 0$ donc $\text{tr}(A_n) = 0$ et $\text{tr}(A_0) = \text{tr}(\mathcal{J}) = 2^N$

$$\text{d'où } \text{tr}(B_k) = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) \text{tr}(A_n) = \frac{1}{2^N} P_k(0) 2^N = P_k(0) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{0}{i} \binom{N-0}{k-i} = \binom{N}{k} \text{ d'après 2.c.}$$

14. a) Les B_k sont des projecteurs ; on note E_k l'image de B_k (dans $\mathbf{R}^{2^N}$).

Si $0_E = X_0 + X_1 + \dots + X_N$ avec X_k appartenant à E_k alors $X_k = B_k \cdot X_k$ donc

$$0_E = B_l(0_E) = \sum_{k=0}^N B_l(x_k) = \sum_{k=0}^N B_l \cdot B_k \cdot X_k = B_l \cdot X_l = X_l \text{ car } B_l \cdot B_k = 0 \text{ pour } k \neq l.$$

Les images des B_k sont en somme directe ; de plus la somme des dimensions est

$$\sum_{k=0}^N \text{rg}(B_k) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N =: \text{on a } \mathbf{R}^{2^N} = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_N.$$

On va donc exprimer les A_n comme combinaisons linéaires des B_k ce qui donnera la diagonalisation.

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k B_k = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) A_n \right) = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k}{2^N} P_k(n) \right) A_n = \sum_{n=0}^N P(n) A_n \text{ où } P = \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k}{2^N} P_k.$$

$$\text{Si } P = L_i \text{ le polynôme de Lagrange tel que } L_i(j) = \delta_{i,j} \text{ pour } j \in E \text{ on a } \sum_{k=0}^N \alpha_k B_k = \sum_{k=0}^N L_i(n) A_n = A_i.$$

Il reste à décomposer les polynômes L_i .

La famille $(P_0, P_1, \dots, P_N)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_N[X]$ donc la décomposition d'un vecteur dans

$$\text{cette base est } P = \sum_{k=0}^N \frac{\langle P | P_k \rangle}{\langle P_k | P_k \rangle} P_k. \text{ On a vu que } \langle P_k | P_k \rangle = 2^N \binom{N}{k}.$$

$$\langle L_i | P_k \rangle = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} L_i(n) P_k(n) = \binom{N}{i} P_k(i) \text{ donc } L_i = \sum_{k=0}^N \frac{\binom{N}{i} P_k(i)}{2^N \binom{N}{k}} P_k.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha_k = \frac{\binom{N}{i} P_k(i)}{\binom{N}{k}}$ on a $\sum_{k=0}^N \alpha_k B_k = A_i$;

les valeurs propres de A_i sont les réels $\frac{\binom{N}{i} P_k(i)}{\binom{N}{k}}$ pour k appartenant à E

et les sous-espaces propres associés sont les images des B_k .

b) Pour $i = 1$ les valeurs propres de A_1 sont les réels $\frac{\binom{N}{1} P_k(1)}{\binom{N}{k}}$.

$$\text{Or } P_k(1) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{1}{n} \binom{N-1}{k-n} = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \binom{1}{n} \binom{N-1}{k-n} = \binom{N-1}{k} - \binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!(N-2k)}{k!(N-k)!}.$$

Les valeurs propres sont donc les entiers $N - 2k$ pour k appartenant à E qui sont distinctes donc les sous-espaces propres sont les $\text{Im}(B_k)$ qui sont de dimensions $\text{rg}(B_k) = \binom{N}{k}$