

Corrigé CCP mathématiques || 2010

I.1

On a $u_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$. De plus $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc $\sum u_n(x)$ converge (séries de Riemann, $n \geq 2$).

I.2

1.2.1 $u_n(x) = (n+x)^{-2}$ donc par un calcul immédiat

$$u_n^{(p)}(x) = (-2)(-3)\dots(-(p+1))(n+x)^{-2-p} = \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}$$

1.2.2 On a pour tous éléments x de $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $0 < n+a \leq n+x \leq n+b$ d'où
 $0 < \frac{1}{(n+x)^{2+p}} \leq \frac{1}{(n+a)^{2+p}}$ pour tout entier naturel p .

La série $\sum u_n^{(p)}$ converge donc normalement sur $[a, b]$

Par conséquent, si $p \in \mathbb{N}^*$, comme $\sum u_n$ converge simplement, et que $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement pour tout $k \in [[1, p]]$,

1.2.3 U est dérivable à tout ordre p sur tout segment $[a, b] \subset]-1, +\infty[$, et donc sur
 $] -1, +\infty[$ et $\forall x \in] -1, +\infty[$
$$U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{2+p}}$$

U est donc de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$

I.3

$$1.3.1 \quad U(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n+N)^2} = U_N(x) + U(x+N)$$

1.3.2 Pour tout $x \in] -N-1, -N[$, on a: $U(x) = U_N(x) + U(x+N)$ avec $x+N \in] -1, +\infty[$
L'application U_N est une fraction rationnelle donc est de classe C^∞ sur $] -N-1, -N[$
où elle est définie.

L'application $x \rightarrow x+N$ est de classe C^∞ (fonction affine), et U est de classe C^∞ sur
 $] -1, +\infty[$.

Donc par composition: $x \rightarrow U(x+N)$ est de classe C^∞ sur $] -N-1, -N[$ et

$$U^{(p)}(x) = U_N^{(p)}(x) + U^{(p)}(x+N) = (-1)^p(p+1)! \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)^{2+p}} + (-1)^p(p+1)! \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{2+p}} =$$

$$\text{Soit à nouveau: } U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{2+p}}$$

U est donc de classe C^∞ sur $] -N-1, -N[$.

Donc U est de classe C^∞ sur chacun des intervalles dont D est la réunion, donc sur
 D

$$1.3.3 \quad \text{On a donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} U^{(p-2)}(x)$$

$$1.4 \quad \text{On pose } U_0(x) = 0. \text{ Pour } x \in D \quad U(x) = \frac{1}{(x+N)^2} + U_{N-1}(x) + U(x+N)$$

U_{N-1} est une fonction polynôme, et $x \rightarrow U(x+N)$ est continue en $-N$ (puisque U) est continue en 0, donc $x \rightarrow U_{N-1}(x) + U(x+N)$ est continue, donc bornée au voisinage de $-N$. Donc

$$\boxed{U(x) \underset{x \rightarrow -N}{\sim} \frac{1}{(x+N)^2}}$$

1.5

1.5.1 Pour $x > -1$: $U'(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3} < 0$

1.5.2 Pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [x+n-1, x+n]$ on a : $\frac{1}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{t^2}$ donc

$$\int_{x+n-1}^{x+n} \frac{dt}{(t+1)^2} = \int_{x+n}^{x+n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{(x+n)^2} \leq \int_{x+n-1}^{x+n} \frac{dt}{t^2}$$

d'où pour $N \in \mathbb{N}$, d'après la relation de Chasles : $\int_{x+1}^{x+1+N} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{dt}{t^2} \leq \int_x^N \frac{dt}{t^2}$.

D'où, en faisant tendre N vers $+\infty$ puisque les intégrales convergent :

$$\boxed{\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}}$$

On obtient alors $\frac{1}{x+1} \leq U(x) \leq \frac{1}{x}$ d'où $\boxed{U(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

1.6 Pour $x \in D$, on a $\frac{x}{2} \in D$ et $\frac{x-1}{2} \in D$. De plus $U(\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n)^2}$ et

$$U(\frac{x-1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n-1)^2}$$

d'où le résultat

PARTIE II

II.1.1 $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ donc $f_p(t) \underset{0}{\sim} t^p$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} f_p(t) = 0}$ et $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} f_0(t) = 1}$

1.1.2 $f_p(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{p+1}}{e^t}$

II.2.1 $t \rightarrow f_0(t)e^{-xt}$ est positive continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $f_0(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}$

Donc, si $x \leq -1$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-(x+1)t} = +\infty$, donc l'intégrale diverge grossièrement.

Si $x > -1$ alors $te^{-(x+1)t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ d'après les croissances comparées, et donc l'intégrale converge.

II.2.2 f_p est positive et l'exponentielle croissante, d'où pour tout $t \geq 0$ et

$x \geq a$: $0 \leq f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$ puisque $-xt \leq -at$

On a $f_p(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} t^{p+1}e^{-(x+1)t}$ donc d'après les croissances comparées, pour

$x > -1$: $f_p(t)e^{-xt} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $t \rightarrow f_p(t)e^{-xt}$ qui est positive et continue.

II.2.3 On pose $u(x, t) = f_0(t)e^{-xt}$, pour $t \geq 0$ et $x > -1$

u admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x, t) = (-1)^p t^p f_0(t)e^{-xt} = (-1)^p f_p(t)e^{-xt}$$

De plus $t \rightarrow \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq a$ et $t \in [0, +\infty[$ $\left| \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x, t) \right| = f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$

Comme $t \rightarrow f_p(t)e^{-at}$ est intégrable, on en déduit que f est de classe C^p sur tout

$[a, +\infty[$ avec $a > -1$ (puisque bien sûr la continuité et la condition de domination de $t \rightarrow \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t)$ vaut pour tout entier k compris entre 1 et p).

Par extension de l'intervalle, φ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et pour tout x de $] -1, +\infty[$, on a $\boxed{\varphi^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (-1)^p f_p(t) e^{-xt} dt}$

II.2.4 On a par convexité de l'exponentielle : $0 < e^t - 1 \leq t$ pour tout $t > 0$, donc $0 \leq f_0(t)e^{-xt} \leq e^{-xt}$ pour tout $t \geq 0$

Pour $x > 0$, on a donc $0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ (intégrale convergente)

Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

II.3

II.3.1 Pour $x > -1$, on a $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-xt} - e^{-(x+1)t})}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(x+1)t} dt = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$ (on effectue une intégration par parties dans cette dernière intégrale)

II.3.2 On pose pour $x > -1$ $h(x) = U(x) - \varphi(x)$.

On a $U(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + U(x+1)$. Donc h est périodique de période 1.

D'autre part, on a d'après la question 1.5.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

Pour tout $x > -1$ et tout entier naturel n , on a donc $h(x+n) = h(x)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x+n) = 0$ on a donc $h(x) = 0$ et $\boxed{U(x) = \varphi(x)}$

II.3.3 En égalant les expressions trouvées pour les dérivées d'ordre $p-2$ de U et φ , on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} e^{-xt}}{e^t - 1} dt$$

PARTIE III

III.1 g est 2π périodique continue sur $] -\pi, \pi[$ et $\lim_{\pi^-} g = \lim_{-\pi^+} g$. Donc, par 2π -périodicité g est continue sur $\mathbb{R}$

D'autre part, g est dérivable sur $]0, \pi[$ et $g'(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$. g' admet des limites finies en 0 par valeurs supérieures et en π par valeurs inférieures et est donc par parité et 2π périodicité de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, g est donc en tout point réel la somme de sa série de Fourier, laquelle converge normalement.

III.2

III.2.1 Comme g est paire, on a $b_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

III.2.2 Comme g est paire, on a $a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos nt dt$

Pour n non nul, en intégrant par parties:

$$a_n(g) = -\frac{2}{\pi n} \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin nt \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin nt dt = -\frac{2}{\pi n^2} [\cos nt]_0^\pi = \frac{-2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$$

Si n est pair non nul, on a donc $a_n(g) = 0$ et si n est impair, $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on a

$$\text{donc } a_{2p+1}(g) = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}$$

$$\text{Enfin } a_0(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = -\frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2\right]_0^\pi = 0$$

III.3.

III.3.1 On a donc pour tout t réel: $g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$

Pour $t = 0$, on obtient donc: $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

II.3.2 On a $U(-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}$

En utilisant la question I.6 avec $x = 0$, on a donc $\frac{1}{4}[U(0) + U(-\frac{1}{2})] = U(0)$, d'où

$$U(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

III.4 Comme g est continue, on peut appliquer la relation de Parseval et donc

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

$$\text{Or } \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt = 2 \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 dt = -\frac{4}{3} \left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^3\right]_0^\pi = \frac{4}{3} \frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{6}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

On sait que la série $\sum \frac{1}{n^4}$ converge et en regroupant les termes pour les valeurs de n paires et impaires, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

III.5

III.5.1 g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une unique primitive G prenant la valeur 0 en 0

On a pour tout x réel $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. Donc $G(-x) = \int_0^{-x} g(t) dt$. En effectuant le changement de variables de classe C^1 $u = -t$ (donc $dt = -du$), on obtient $G(-x) = -\int_0^x g(-u) du = -\int_0^x g(u) du = -G(x)$. Donc G est impaire

De même ,pour tout x réel:

$$G(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt = G(x) + \int_0^{2\pi} g(t)dt = G(x) + \pi a_0 = G(x)$$

Donc G est 2π – périodique

III.5.2 On a $a_n(G') = nb_n(G)$, donc pour n non nul: $b_n(G) = \frac{1}{n}a_n(G') = \frac{1}{n}a_n(g)$

Si n est pair, on a donc $b_n(G) = 0$ et si n est impair, $n = 2k - 1$, on a

$$b_{2k-1}(G) = \frac{4}{\pi(2k-1)^3}$$

On a d'autre part $a_n(G) = 0$ pour tout n puisque G est impaire.

G est de classe C^1 puisque dérivable et que $G' = g$ est continue. G est donc en tout point la somme de sa série de Fourier.

III.5.3

Comme G est continue, on peut appliquer la relation de Parseval et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^6}$$

$$\text{Or } \int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt = 2 \int_0^{\pi} G^2(t)dt$$

$$\text{Pour } t \in [0, \pi] \text{ on a } G(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 + \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{Donc } \int_0^{\pi} G^2(t)dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^4 \right) dt =$$

$$\left[\frac{\pi^4 t}{64} + \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^3 - \frac{1}{20}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^5 \right]_0^{\pi} = 2\pi^5 \left[-\frac{1}{64} - \frac{1}{192} + \frac{1}{320} \right] = \pi^5 \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{96} \right) = \frac{16\pi^5}{960}$$

$$\text{Donc } \frac{16\pi^4}{960} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} \text{ donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\text{On a alors , puisque } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \text{ converge: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{64}{63} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{64}{63} \frac{\pi^6}{960} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$