

## Partie I : étude d'une série de fonctions

1. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{*+}$ , la famille  $\{\exp(-\pi n^2 t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable. Pour la suite, on

posera  $\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi n^2 t)$  pour tout  $t > 0$ .

2. Montrer que la fonction  $\Theta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$ . En étudier les variations et la concavité.

3. Déterminer  $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t)$ . La fonction  $\Theta - \ell$  est-elle intégrable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  ?

## Partie II : étude d'une intégrale auxiliaire

Pour  $t > 0$  fixé et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \exp(-\pi t x^2)$ .

1. Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi u x) dx$  a bien un sens. Calculer  $\hat{f}(0)$ .

[ On pourra faire intervenir la fonction  $\Gamma$ . ]

2. Montrer que  $\hat{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et trouver une relation simple entre  $(\hat{f})'(u)$  et  $u\hat{f}(u)$  pour  $u$  réel. En déduire la valeur de  $\hat{f}(u)$  pour  $u$  réel.

3. **Une équation fonctionnelle.** Pour  $x$  réel, on pose

$$F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p) \quad (1)$$

Montrer que  $F$  est bien définie,  $C^1$  et 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ . Justifier l'existence d'une famille sommable  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que, pour tout  $x$  réel,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi n x) \quad (2)$$

Déterminer la valeur des  $c_n$ , en utilisant  $\hat{f}$ .

4. Conclure de tout cela que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right) \quad (3)$$

En déduire un équivalent de  $\Theta(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ .

## Partie III : une formule sommatoire

On considère dans cette partie une fonction  $f$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  soient intégrables sur  $\mathbb{R}$ . On définit encore  $\hat{f}$  et  $F$  à partir de  $f$  comme dans la partie II. Enfin, si  $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , on pose  $N(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq +\infty$  et, si  $g$  est continue par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx.$$

1. **Étude de la fonction  $\hat{f}$ .** Montrer que  $N(\hat{f}) \leq N_1(f)$ .

2. Montrer que  $\hat{f}(n) = O(1/n^\alpha)$  pour un  $\alpha$  convenable et montrer que la famille  $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable.

3. **Étude de la fonction  $F$ .** Pour  $x$  réel et  $p \in \mathbb{Z}$ , majorer

$$\left| f(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f(t) dt \right|$$

par une intégrale portant sur  $|f'|$ . En conclure que la famille  $\{f(x+n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable.

4. Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  et 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ . Majorer  $N(F)$  à l'aide de  $N_1(f)$  et de  $N_1(f')$ .

**5. Développement de  $F$  en série de FOURIER.** Montrer que, pour tout  $x$  réel,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \exp 2i\pi nx \quad (2')$$

Établir la *formule sommatoire de POISSON* :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$$

On ne demande pas de justifier que les résultats de cette partie s'étendent au cas où  $f$  n'est de classe  $C^2$  que par morceaux,  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  étant toujours supposées intégrables.

**6. Un exemple d'application.** On choisit dans cette question  $f$  définie par  $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-2\pi a|x|)$ , où  $a > 0$  est donné. En appliquant à  $f$  la formule (2'), déterminer la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2 + a^2}$ .

En déduire la valeur de la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ , pour tout  $x \in [0; 1[$  puis pour tout  $x$  réel.