

1 Préliminaires

1.1) La réflexivité et la transitivité de \preccurlyeq sont évidentes. Si $x, y \in \mathbf{D}^n$ et si $x \preccurlyeq y \preccurlyeq x$ alors $x_1 = y_1, x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \dots, x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ d'où $x_i = y_i$ pour tout i . Ceci prouve l'antisymétrie de la restriction de \preccurlyeq à \mathbf{D}^n . Par contre il n'y a pas antisymétrie sur \mathbf{R}^n : $(x \preccurlyeq y \preccurlyeq x) \iff (x^\downarrow = y^\downarrow) \not\iff (x = y)$.

1.2) Conséquence immédiate de la relation $\sum_{i=0}^k y_{n-i}^\downarrow = \sum_{i=1}^n y_i^\downarrow - \sum_{i=1}^{n-k-1} y_i^\downarrow$.

1.3) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $n = \sum_{i=1}^n x_i^\downarrow \leq (n-k)x_k^\downarrow + \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \frac{n-k}{k} \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow + \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow = \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow$, d'où $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \geq k$.

2 Matrices doublement stochastiques

2.1) Une matrice P est doublement stochastique si et seulement si elle est à coefficients positifs et si $eP = e$ et $P^t e = e$. Les propriétés demandées sont alors évidentes.

2.2) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x = e_j P$. On a $x \preccurlyeq e_j$ donc, d'après 1.2, $x_n^\downarrow \geq 0$, c'est-à-dire $x_i = P_{ij} \geq 0$ pour tout i . De plus $\sum_{i=1}^n P_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^\downarrow = 1$. Considérons à présent $y = eP$. On a $y \preccurlyeq e$ et $\sum_{i=1}^n y_i = n$, d'où $e \preccurlyeq y$ d'après 1.3. Ainsi $y^\downarrow = e^\downarrow = e$, ce qui implique $y = e$. On en déduit $y_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$ pour tout i .

2.3) Il existe σ, ρ , permutations de $\{1, \dots, n\}$, telles que $x^\downarrow = xQ(\sigma)$ et $y^\downarrow = yQ(\rho)$. On a alors $y^\downarrow = x^\downarrow Q(\sigma)^{-1} P Q(\rho)$, et $P' = Q(\sigma)^{-1} P Q(\rho) = Q(\sigma^{-1}) P Q(\rho)$ est doublement stochastique en tant que produit de matrices doublement stochastiques.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k y_j^\downarrow &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n P'_{ij} x_i^\downarrow = \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k P'_{ij} x_i^\downarrow}_a + \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n P'_{ij} x_i^\downarrow}_b - \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n P'_{ij} (x_k^\downarrow - x_i^\downarrow)}_{\geq 0} \\ a &= \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow - \sum_{i=1}^k \left(1 - \sum_{j=1}^k P'_{ij}\right) x_i^\downarrow \\ b &= \sum_{j=1}^k \left(1 - \sum_{i=1}^k P'_{ij}\right) x_k^\downarrow = \sum_{i=1}^k \left(1 - \sum_{j=1}^k P'_{ij}\right) x_k^\downarrow \\ \sum_{j=1}^k y_j^\downarrow &\leq a + b = \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow - \underbrace{\sum_{i=1}^k \left(1 - \sum_{j=1}^k P'_{ij}\right) (x_i^\downarrow - x_k^\downarrow)}_{\geq 0} \leq \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow, \end{aligned}$$

et il y a égalité si $k = n$. Ceci prouve que $y \preccurlyeq x$.

2.4) Soit $T = \lambda I + (1 - \lambda)Q(\sigma)$ alors $(xT)_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_{\sigma(i)}$.

2.5) Comme $x \neq y$ et $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$, il existe $j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x_j > y_j$ et $x_k < y_k$. En prenant j et k minimaux, on a de plus $j < k$ car $\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$. Donc $x_j > y_j \geq y_k > x_k$. On pose $\lambda = \frac{y_j - x_k}{x_j - x_k} \in]0, 1[$ et soit

σ la transposition (j k). Soient enfin $T = \lambda I + (1 - \lambda)Q(\sigma)$ et $x' = Tx$: T est doublement stochastique comme barycentre de deux telles matrices. De plus, $x'_i = x_i$ pour $i \notin \{j, k\}$ et $x'_j = \lambda x_j + (1 - \lambda)x_k = y_j$, donc x' a au moins une coordonnée de plus que x en commun avec y . Il reste à vérifier qu'on a bien $y \preceq x'$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p y_i \leq \sum_{i=1}^p x'_i$ avec égalité pour $p = n$.

Or $\sum_{i=1}^p x'_i \geq \sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p x_i \geq \sum_{i=1}^p y_i$ pour tout $p \in \{1, \dots, j-1\} \cup \{k, \dots, n\}$ avec égalité pour $p = n$, donc les seuls p pouvant poser problème sont ceux compris entre j et $k-1$. Et pour un tel choix de p on a :

$$\sum_{i=1}^p x'_i \geq \sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p x_i + (y_j - x_j) = \sum_{i=1}^j y_i + \sum_{i=j+1}^p x_i \geq \sum_{i=1}^p y_i.$$

2.6) On a vu en **2.3** que si $y = xP$ avec P doublement stochastique alors $y \preceq x$. On prouve l'implication réciproque par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évident. Pour $n \geq 2$, soient $x, y \in \mathbf{R}^n$ tels que $y \preceq x$. Soient σ, ρ , permutations de $\{1, \dots, n\}$ telles que $y^\downarrow = yQ(\sigma)$ et $x^\downarrow = xQ(\rho)$. Si $y^\downarrow = x^\downarrow$ alors $y = xQ(\rho \circ \sigma^{-1})$. Sinon, il existe T doublement stochastique et $x' = x^\downarrow T$ tels que $y^\downarrow \preceq x'$ et x' et y^\downarrow ont au moins une coordonnée égale (question précédente). Mettons $x'_j = y_j$, et soit k tel que $x'_j = x'_k$. Considérons alors les vecteurs X et Y de \mathbf{R}^{n-1} obtenus à partir de x' et y^\downarrow en oubliant la j -ème coordonnée.

Si $p < \min(j, k)$, on a $\sum_{i=1}^p Y_i^\downarrow = \sum_{i=1}^p y_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^p x'_i = \sum_{i=1}^p X_i^\downarrow$.

Si $p \geq \max(j, k)$, on a $\sum_{i=1}^p Y_i^\downarrow = \sum_{i=1}^{p+1} y_i^\downarrow - y_j^\downarrow \leq \sum_{i=1}^{p+1} x'_i - x'_k = \sum_{i=1}^p X_i^\downarrow$ et il y a égalité si $p = n-1$.

Si $j \leq p < k$, on a $\sum_{i=1}^p Y_i^\downarrow = \sum_{i=1}^{p+1} y_i^\downarrow - y_j^\downarrow \leq \sum_{i=1}^p y_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^p x'_i = \sum_{i=1}^p X_i^\downarrow$.

Si $k \leq p < j$, on a $\sum_{i=1}^p Y_i^\downarrow = \sum_{i=1}^p y_i^\downarrow = \sum_{i=1}^{p+1} y_i^\downarrow - y_{p+1}^\downarrow \leq \sum_{i=1}^{p+1} y_i^\downarrow - y_j^\downarrow \leq \sum_{i=1}^{p+1} x'_i - x'_k = \sum_{i=1}^p X_i^\downarrow$.

Ainsi $Y \preceq X$. Par hypothèse de récurrence il existe $P \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ doublement stochastique telle que $Y = XP$.

On note $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{j-1}(\mathbf{R})$ et on considère la matrice $P' = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. C'est une matrice doublement stochastique telle que $y^\downarrow = x'P'$. Ainsi $y = xQ(\rho)TP'Q(\sigma^{-1})$.

2.7) $j \leftarrow 1$

Tant que $x_j = y_j$ *faire* $j \leftarrow j + 1$ *fin tant que*

$k \leftarrow j + 1$

Tant que $x_k \geq y_k$ *faire* $k \leftarrow k + 1$ *fin tant que*

$\lambda \leftarrow (y_j - x_k)/(x_j - x_k)$

$T \leftarrow I$

$T_{jj} \leftarrow \lambda; T_{jk} \leftarrow 1 - \lambda; T_{kj} \leftarrow 1 - \lambda; T_{kk} \leftarrow \lambda$

retourner T .

2.8) $\text{Sens} \Leftarrow$: soient $S, T \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinaux s, t avec $s + t = n + 1$ tels que $M_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S \times T$.

S'il existait une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\prod_{i=1}^n M_{\sigma(i), i} \neq 0$ alors $\sigma(T)$ serait disjoint de S , ce qui est impossible vu les cardinaux de ces ensembles.

$\text{Sens} \Rightarrow$: par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évident. Dans le cas général, on suppose l'implication prouvée pour toute matrice de taille $k < n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\prod_{i=1}^n M_{\sigma(i), i} = 0$ pour toute permutation σ . On

construit deux parties $S, T \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinaux s, t avec $s + t = n + 1$ tels que $M_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S \times T$ de la manière suivante : si la première colonne de M est nulle alors les ensembles $S = \{1, \dots, n\}$ et $T = \{1\}$ conviennent. Sinon, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $M_{i1} \neq 0$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la sous-matrice M_1 déduite de M en supprimant la ligne i et la colonne 1. Il existe donc $S_1 \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ et $T_1 \subset \{2, \dots, n\}$ de cardinaux s_1, t_1 avec $s_1 + t_1 = n$ tels que $M_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S_1 \times T_1$. Quitte à permuter les lignes et les colonnes de M , on peut supposer $S_1 = \{1, \dots, s_1\}$ et $T_1 = \{s_1 + 1, \dots, n\}$. Alors

$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{s_1}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{t_1}(\mathbf{R})$. On considère dans ce qui suit que les lignes et les colonnes de C sont indexées par T_1 , au lieu de $\{1, \dots, t_1\}$. Si σ est une permutation de S_1 et ρ est une permutation de T_1 alors $\prod_{i \in S_1} A_{\sigma(i),i} \times \prod_{i \in T_1} C_{\rho(i),i} = 0$ par hypothèse sur M . Comme σ et ρ peuvent être choisies indépendamment, on en déduit que l'une des deux propriétés suivantes est vraie :

$$(1) \iff \forall \sigma, \prod_{i \in S_1} A_{\sigma(i),i} = 0, \quad (2) \iff \forall \rho, \prod_{i \in T_1} C_{\rho(i),i} = 0.$$

Dans le premier cas, par hypothèse de récurrence (on a $s_1 \leq n - 1$), il existe $S_2, T_2 \subset S_1$ de cardinaux s_2, t_2 avec $s_2 + t_2 = s_1 + 1$ tels que $A_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S_2 \times T_2$. Ainsi $M_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S_2 \times (T_1 \cup T_2)$ et $\text{card}(S_2) + \text{card}(T_1 \cup T_2) = s_2 + t_1 + t_2 = n + 1$. On conclut de même dans le deuxième cas.

2.9) Soient $S, T \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinaux s, t avec $s + t = n + 1$ tels que $P_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in S \times T$. Quitte à permuter les lignes et les colonnes de P , on peut supposer que P est de la forme $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{s, n-t}(\mathbf{R})$. La somme de tous les coefficients de A est égale à la somme de tous les coefficients des s premières lignes de P , soit s . De même, la somme de tous les coefficients de C est égale à t , et la somme des coefficients de B est positive ou nulle. Donc $s + t$ est au plus égal à la somme de tous les coefficients de P , soit $s + t \leq n$. On conclut à l'existence de σ grâce à l'équivalence démontrée à la question précédente.

Considérons alors $P' = P - cQ(\sigma)$: les coefficients de P' sont positifs ou nuls et la somme des coefficients d'une ligne quelconque de P' est égale à $1 - c$, de même que la somme des coefficients d'une colonne quelconque de P' . Ainsi, si $c \neq 1$, la matrice $R = P'/(1 - c)$ est doublement stochastique.

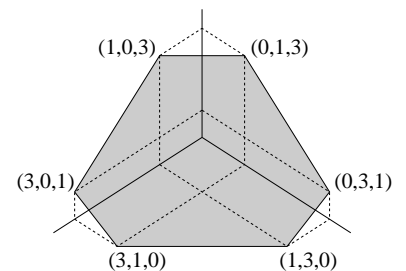
2.10) Pour P doublement stochastique soit $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls dans P . Comme chaque colonne de P comporte au moins un coefficient non nul, on a $N(P) \geq n$. On prouve par récurrence sur $N(P)$ l'existence d'une décomposition de P de la forme $P = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_k Q_k$ avec $\alpha_i \in \mathbf{R}^+$, Q_i matrice de permutation, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ et $k \leq N(P) - n + 1 \leq n^2 - n + 1$.

Si $N(P) = n$: chaque colonne de P comporte exactement un coefficient non nul, et ce coefficient vaut 1 (somme de la colonne). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on note $\sigma(i)$ l'unique indice tel que $P_{\sigma(i),i} = 1$. Puisque la somme de chaque ligne est égale à 1, σ est bijective et $P = Q(\sigma)$. On pose $\alpha_1 = 1$ et $Q_1 = Q(\sigma)$.

Si $N(P) > n$: on suppose l'existence d'une décomposition prouvée pour toute matrice doublement stochastique P' telle que $N(P') < N(P)$. Soient σ et c mis en évidence à la question précédente. On a $c < 1$ (sinon on aurait $N(P) = n$) donc μ, R , définis à la fin de la question précédente existent et $\mu = 1 - c > 0$. Si $P_{ij} = 0$ alors $i \neq \sigma(j)$ donc $R_{ij} = 0$. Si j est tel que $c = P_{\sigma(j),j}$ alors $R_{\sigma(j),j} = 0$. Ainsi, $N(R) \leq N(P) - 1$ et il existe une décomposition de R : $R = \beta_1 Q_1 + \dots + \beta_\ell Q_\ell$ avec $\beta_i \geq 0$, Q_i matrice de permutation, $\beta_1 + \dots + \beta_\ell = 1$ et $\ell \leq N(R) - n + 1 \leq N(P) - n$. On en déduit $P = \mu\beta_1 Q_1 + \dots + \mu\beta_\ell Q_\ell + cQ(\sigma)$, ce qui donne une décomposition de P de la forme annoncée.

Remarque : le cas $N(P) = n + 1$ est impossible, donc en fait on a $k \leq n^2 - n$. Ce majorant n'est pas optimal car l'ensemble des matrices doublement stochastiques est inclus dans un espace affine de dimension $(n - 1)^2$, donc d'après le théorème de Carathéodory tout barycentre à coefficients positifs de matrices de permutations peut être réécrit comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $(n - 1)^2 + 1$ telles matrices.

2.11) D'après les questions **2.6** et **2.10**, $y \preceq x$ si et seulement si y est barycentre à coefficients positifs des six vecteurs déduits de x par permutation de coordonnées. L'ensemble des vecteurs y est donc l'enveloppe convexe de ces six vecteurs, qui sont coplanaires puisque la somme $x_1 + x_2 + x_3$ est conservée ; c'est en général un hexagone. Avec $x = (1, 0, 3)$ on obtient la figure ci-contre.



3 Application aux graphes

3.1) On appelle *chaîne* toute suite (a_0, \dots, a_n) d'arêtes deux à deux distinctes telles que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_i \cap a_{i+1} \neq \emptyset$. On dit qu'elle est *prolongeable* s'il existe $a \in E$ telle que (a, a_0, \dots, a_n) ou (a_0, \dots, a_n, a) est une chaîne. Si le graphe G peut être colorié avec deux couleurs alors on a les propriétés suivantes :

- 1) toute arête appartient à au moins une chaîne non prolongeable.
- 2) si (a_0, \dots, a_n) est non prolongeable et $a \in E \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ alors pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $a \cap a_i = \emptyset$.
- 3) si (a_0, \dots, a_n) et (b_0, \dots, b_p) sont non prolongeables alors $\{a_0, \dots, a_n\}$ et $\{b_0, \dots, b_p\}$ sont égaux ou disjoints.
- 4) E est réunion disjointe de chaînes non prolongeables.

Démonstration :

1) Résulte du fait que E est fini.

2) Si $a \cap a_i \neq \emptyset$ alors $i \neq 0$ et $i \neq n$ car (a_0, \dots, a_n) est non prolongeable. Soit x le sommet commun à a et a_i . Alors x est aussi un sommet de a_{i-1} ou a_{i+1} , donc il y a trois arêtes distinctes contenant x ce qui est incompatible avec l'existence d'une coloration de G avec deux couleurs.

3) Si $\{a_0, \dots, a_n\} \neq \{b_0, \dots, b_p\}$ alors il existe par exemple j tel que $b_j \notin \{a_0, \dots, a_n\}$. Si $j \geq 1$ alors b_j a un sommet commun avec b_{j-1} donc $b_{j-1} \notin \{a_0, \dots, a_n\}$ d'après 2). De même, si $j < p$ alors $b_{j+1} \notin \{a_0, \dots, a_n\}$. De proche en proche, on montre qu' $\{a_0, \dots, a_n\}$ ne contient aucun élément de $\{b_0, \dots, b_p\}$.

4) On construit une décomposition de E en chaînes non prolongeables disjointes de proche en proche. Si $E \neq \emptyset$, soit $a \in E$ et (a_0, \dots, a_n) une chaîne non prolongeable contenant a . Si $E \neq \{a_0, \dots, a_n\}$, soit $b \in E \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ et (b_0, \dots, b_p) une chaîne non prolongeable contenant b . Elle est disjointe de $\{a_0, \dots, a_n\}$ d'après 3). On continue ainsi tant qu'il reste des arêtes.

Conséquence. Si G admet une (p_1, p_2) -coloration avec $p_1 > p_2$ alors il existe une chaîne non prolongeable comportant strictement plus d'arêtes de couleur 1 que d'arêtes de couleur 2. Les couleurs alternent le long de cette chaîne, donc il y exactement une arête de plus couleur 1 dans la chaîne. En inversant les couleurs de cette chaîne et en conservant les couleurs des autres arêtes, on obtient une $(p_1 - 1, p_2 + 1)$ -coloration de G .

3.2) On a $(q_j - 1, q_i + 1) = (q_j, q_i) \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \frac{q_j - q_i - 1}{q_j - q_i} \in [0, 1[$, donc

$$x = (q_1, \dots, q_j - 1, \dots, q_i + 1, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_n)P$$

avec $P_{kk} = 1$ si $k \notin \{i, j\}$, $P_{ii} = P_{jj} = \alpha$, $P_{ij} = P_{ji} = 1 - \alpha$ et $P_{k\ell} = 0$ dans les autres cas. La matrice P est doublement stochastique, d'où $x \preceq (q_1, \dots, q_n)$ d'après **2.3**.

3.3) *Lemme 1* : soit $p = (p_1, \dots, p_n)$ tel que G est p -coloriable et $j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $p_j > p_k$. Soit $p' = (p'_1, \dots, p'_n)$ défini par $p'_j = p_j - 1$, $p'_k = p_k + 1$ et $p'_i = p_i$ pour $i \notin \{j, k\}$. Alors G est p' -coloriable.

Démonstration : soit c une p -coloration de G et $E' = \{a \in E \text{ tel que } c(a) \in \{j, k\}\}$. Le graphe $G' = (X, E')$ est (p_j, p_k) -coloriable donc il est aussi $(p_j - 1, p_k + 1)$ -coloriable d'après **3.1**. Si c' est une $(p_j - 1, p_k + 1)$ -coloration de G' alors l'application c'' de E dans $\{1, \dots, n\}$ définie par $c''(a) = c'(a)$ si $a \in E'$ et $c''(a) = c(a)$ sinon est une p' -coloration de G .

Lemme 2 : soient $p, q \in \mathbf{N}^n \cap \mathbf{D}^n$ tels que G est p -coloriable, $q \preceq p$ et $q \neq p$. Alors il existe $r \in \mathbf{N}^n \cap \mathbf{D}^n$ tel que $q \preceq r \preceq p$, $r \neq p$, et G est r -coloriable.

Démonstration : soient $j, k \in \{1, \dots, n\}$ minimaux tels que $q_j < p_j$ et $q_k > p_k$. Comme $p, q \in \mathbf{D}^n$ et $q \preceq p$, on a $j < k$, donc $p_j > q_j \geq q_k > p_k$. On pose $p' = (p_1, \dots, p_j - 1, \dots, p_k + 1, \dots, p_n)$ et $r = p'^{\downarrow}$. G est p' -coloriable d'après le lemme 1, donc aussi r -coloriable puisque r est une permutation de p' . On a $p' \preceq p$ d'après **3.2**, et $q \preceq p'$ par le même raisonnement qu'en **2.5**, d'où $q \preceq r \preceq p$. Enfin $r \neq p$ car $p_k + 1 \leq q_j < p_j$ donc le nombre de coordonnées de r égales à p_j est moindre que le nombre correspondant pour p .

Réponse à la question : soient $p, q \in \mathbf{N}^n$ tels que G est p -coloriable et $q \preceq p$. Soit \mathcal{E} l'ensemble des $r \in \mathbf{N}^n \cap \mathbf{D}^n$ tels que $q \preceq r \preceq p$ et G est r -coloriable. $p^{\downarrow} \in \mathcal{E}$ donc \mathcal{E} est non vide et \mathcal{E} est fini car les coordonnées d'un élément

de \mathcal{E} sont entières comprises entre 0 et $\max(p_1, \dots, p_n)$. Il existe donc un élément r minimal dans \mathcal{E} . Le lemme 2 montre qu'on ne peut avoir $r \neq q^\perp$, d'où $r = q^\perp$ et la question est terminée.

3.4) L'équipe x_i gagne contre toutes les équipes x_j telles que $j > i$.

3.5) On peut supposer (s_1, \dots, s_n) décroissant. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, les équipes x_1, \dots, x_k ont joué $k(k-1)/2$ matches entre elles et $k(n-k)$ matches contre l'une des autres équipes. Le nombre de matches gagnés globalement par x_1, \dots, x_k est donc $s_1 + \dots + s_k \leq k(k-1)/2 + k(n-k) = (n-1) + \dots + (n-k)$, et il y a égalité si $k = n$.

3.6) Pour $i = n$, à la fin de la ligne 2, s a été transformé en $(s_1, \dots, s_{s_n}, s_{s_n+1}-1, \dots, s_{n-1}-1, s_n)$. Le vecteur obtenu en ligne 5 est une permutation de ce dernier, avec toujours s_n en dernière composante. Il faut donc prouver que $(s_1, \dots, s_{s_n}, s_{s_n+1}-1, \dots, s_{n-1}-1) \preceq (n-2, \dots, 0)$, soit $(s_1, \dots, s_{s_n}, s_{s_n+1}-1, \dots, s_{n-1}-1, n-1) \preceq (n-1, \dots, 0)$. Ceci résulte d'une application répétée du lemme suivant :

Lemme : soit $x \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 \leq \dots \leq x_n < n-1$ et $x \preceq (n-1, \dots, 0)$. Alors le vecteur y défini par $y_n = x_n + 1$, $y_{x_n+1} = x_{x_n+1} - 1$ et $y_i = x_i$ pour $i \notin \{n, x_n + 1\}$ vérifie $y \in \mathbb{N}^n$ et $y \preceq (n-1, \dots, 0)$.

Démonstration : Si $y \notin \mathbb{N}^n$ alors $x_{x_n+1} = 0 = x_{x_n} = \dots = x_1$, d'où

$$(n-1) + \dots + 0 = x_1 + \dots + x_n = x_{x_n+2} + \dots + x_n \leq (n-1) + \dots + (x_n + 1),$$

ce qui est impossible avec $x_n \in \mathbb{N}$. Ensuite, soit k le plus petit indice tel que $x_k = x_{k+1} = \dots = x_{x_n+1} = \alpha$. Alors $y^\perp = (x_n + 1, \dots, x_{x_n+2}, \alpha, \dots, \alpha, \alpha - 1, x_{k-1}, \dots, x_1)$, d'où pour $p \in \{1, \dots, n\}$:

$$y_1^\perp + \dots + y_p^\perp = \begin{cases} x_n + \dots + x_{n-p+1} + 1 & \text{si } p < n - k, \\ x_n + \dots + x_{n-p+1} & \text{si } p \geq n - k. \end{cases}$$

Si l'on suppose $y \not\preceq (n-1, \dots, 0)$ alors il existe $p < n - k$ tel que $x_n + \dots + x_{n-p+1} \geq (n-1) + \dots + (n-p)$. Comme $x_n + \dots + x_{n-p+2} \leq (n-1) + \dots + (n-p+1)$, on a $x_{n-p+1} \geq n-p$, donc $n-p+1$ est compris entre $k+2$ et $x_n + 1$. Ainsi, $x_{n-p+1} = \alpha = x_{n-p}$, et $x_1 + \dots + x_{n-p} \geq (n-1) + \dots + (n-p) + \alpha > (n-1) + \dots + (n-p-1)$ en contradiction avec l'hypothèse $x \preceq (n-1, \dots, 0)$. Le lemme est démontré.

Fin de la question : pour $i \in \{1, \dots, n\}$ soient s^i, M^i et Q^i les valeurs de s, M et Q en fin de ligne 5 lorsque l'indice de boucle est égal à i . On vérifie alors par récurrence décroissante sur i que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- 1) $s^i \in \mathbb{N}^n$ et si $i > 1$ alors $s_1^i \leq \dots \leq s_{i-1}^i$, et $(s_1^i, \dots, s_{i-1}^i) \preceq (i-1, \dots, 0)$;
- 2) M^i est à coefficients dans $\{0, 1\}$;
- 3) la diagonale de M^i est nulle ;
- 4) si $i > 1$ alors $M_{jk} = 0$ pour tous $j, k \in \{1, \dots, i-1\}$;
- 5) pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$, on a $(M_{jk} = 1) \implies (M_{kj} = 0)$;
- 6) si $i \leq j \leq n$ alors $M_{j_1}^i + \dots + M_{j_n}^i = (sQ^n \dots Q^i)_j$;
- 7) si $1 \leq j < i$ alors $s_j^i + M_{j_1}^i + \dots + M_{j_n}^i = (sQ^n \dots Q^i)_j$.

1) résulte du lemme précédent et du tri de s effectué en ligne 5.

2) est évident.

3) résulte du fait qu'on ne modifie pas la diagonale de M en lignes 2 et 3, et du fait que cette diagonale est globalement conservée par la conjugaison effectuée en ligne 5.

4) résulte du fait que seules la ligne i et la colonne i de M sont modifiées en lignes 2 et 3, et du fait que la permutation associée à Q^i conserve globalement l'ensemble $\{1, \dots, i-1\}$.

5) résulte du fait qu'on ne modifie jamais deux coefficients symétriques par rapport à la diagonale en lignes 2 et 3, et du fait que la conjugaison effectuée en ligne 5 transporte des coefficients symétriques par rapport à la diagonale vers des coefficients eux aussi symétriques par rapport à la diagonale.

6) et 7) résultent du fait que les coefficients de M modifiés en lignes 2 et 3 étaient nuls avant modification d'après la propriété 4 (au rang $i+1$).

Soient alors $M = M^1$ et $Q = Q^n \dots Q^1$: Q est une matrice de permutation et M est à coefficients dans $\{0, 1\}$ à diagonale nulle. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la somme des coefficients de la ligne j de M est égal à $(sQ)_j$ et la somme de tous les coefficients de $M + {}^tM$ est égale à $2((n-1) + \dots + 0) = n(n-1)$. Or $M + {}^tM$ est une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$ et à diagonale nulle d'après les propriétés 3) et 5), donc pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts

on a $M_{jk} + M_{kj} = 1$, soit $(M_{jk} = 1) \iff (M_{kj} = 0)$. Ceci prouve que M est la matrice d'incidence d'un tournoi et que le score de ce tournoi est une permutation de s .

4 Schur-croissance et polygones

4.1) Si f est Schur-croissante, $x \in \mathbf{R}^n$ et Q est une matrice de permutation, alors $xQ \preceq x$ et $x = xQQ^{-1} \preceq xQ$ d'où $f(x) = f(xQ)$, ce qui prouve la symétrie de f . L'implication f est Schur-croissante $\implies f$ est Schur-croissante en ses deux premiers arguments est par ailleurs évidente. Supposons à présent f Schur-croissante en ses deux premiers arguments et symétrique. On démontre que f est Schur-croissante par récurrence sur n . Dans le cas $n = 1$ il n'y a rien à démontrer, et le cas $n = 2$ relève de l'hypothèse faite sur f . Pour $n > 2$, soient $x, y \in \mathbf{R}^n$ avec $x \preceq y$. Si $x^\perp = y^\perp$ alors x est une permutation de y et $f(x) = f(y)$. Sinon, il existe une (λ, Q) -transformation T telle que x^\perp et $y' = y^\perp T$ ont au moins une coordonnée égale et $x^\perp \preceq y'$. Par symétrie de f , $f(x) = f(x^\perp)$ et $f(y) = f(y^\perp)$. De plus, y' et y^\perp ont $n - 2$ coordonnées égales, donc la symétrie de f et sa Schur-croissance par rapport aux deux premiers arguments impliquent $f(y') \leq f(y^\perp)$.

Il reste à prouver que $f(x^\perp) \leq f(y')$; soit i tel que $x_i^\perp = y'_i$ et g l'application de \mathbf{R}^{n-1} dans \mathbf{R} définie par $g(t_1, \dots, t_{n-1}) = f(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i^\perp, t_i, \dots, t_{n-1})$. g est symétrique et Schur-croissante en ses deux premiers arguments, donc est Schur-croissante par hypothèse de récurrence. De plus, $(x_j^\perp)_{j \neq i} \preceq (y'_j)_{j \neq i}$ (même démonstration qu'en 2.6), donc $g((x_j^\perp)_{j \neq i}) \leq g((y'_j)_{j \neq i})$, soit $f(x^\perp) \leq f(y')$.

4.2) Soient $x, y \in \mathbf{R}^n$ tels que $x \preceq y$, $x' = (g(x_1), \dots, g(x_n))$ et $y' = (g(y_1), \dots, g(y_n))$. D'après 2.10, il existe des réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de somme 1 et des matrices de permutation Q_1, \dots, Q_k tels que $x = \alpha_1 y Q_1 + \dots + \alpha_k y Q_k$. Soit σ_j la permutation associée à Q_j . Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$x'_i = g(\alpha_1 y_{\sigma_1(i)} + \dots + \alpha_k y_{\sigma_k(i)}) \leq \alpha_1 g(y_{\sigma_1(i)}) + \dots + \alpha_k g(y_{\sigma_k(i)}) = \alpha_1 y'_{\sigma_1(i)} + \dots + \alpha_k y'_{\sigma_k(i)} = u_i.$$

Le vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) = \alpha_1 y' Q_1 + \dots + \alpha_k y' Q_k$ est tel que $x' \leq u \preceq y'$, donc $\phi(x') \leq \phi(u) \leq \phi(y')$, soit $\psi(x) \leq \psi(y)$.

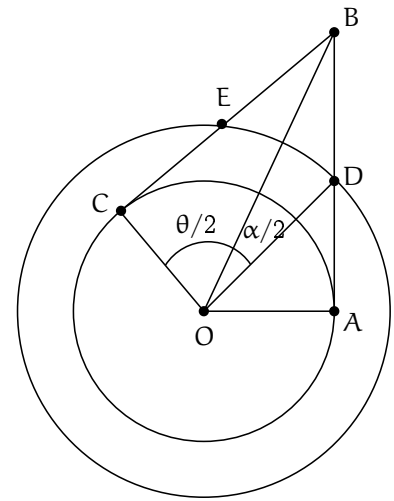
4.3) Intuitivement, si O est à l'intérieur du polygone, alors tous les angles θ_i sont compris entre 0 et π , et l'aire du polygone est la somme des aires des triangles $A_i O A_{i+1}$, $1 \leq i < n$ et de l'aire du triangle $A_n O A_1$, soit $\mathcal{A}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{2}(\sin \theta_1 + \dots + \sin \theta_n)$. Cette relation peut être démontrée formellement, et sans hypothèse sur la position de O , grâce à la formule de Green.

La Schur-décroissance de \mathcal{A} découle alors de la question précédente avec $\phi = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$, fonction croissante et Schur-croissante sur \mathbf{R}^n , et $g = t \mapsto -\frac{1}{2} \sin(t)$ si $t \in [0, \pi]$, $-\frac{1}{2}t$ si $t < 0$, $\frac{1}{2}(t - \pi)$ si $t > \pi$, fonction convexe sur \mathbf{R} .

4.4) Soit (A_1, \dots, A_n) un polygone à n côtés inscrit dans le cercle unité et soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les angles correspondants. Supposons que tous les angles sont compris entre 0 et π . Comme $\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi$, l'isobarycentre des n vecteurs déduits de θ par permutation circulaire des coordonnées est $\theta_0 = (\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi}{n})$, et $\theta_0 \preceq \theta$. La Schur-décroissance de \mathcal{A} permet alors de conclure. Considérons à présent le cas où il existe un angle θ_i supérieur à π . Dans ce cas, $n \geq 4$ et le polygone est inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 1. Son aire est au plus égale à $\pi/2$ tandis que $\mathcal{A}(\theta_0) = (n/2) \sin(2\pi/n) \geq (n/2)(4/n) = 2 > \pi/2$ d'après l'inégalité $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$.

4.5) La figure de l'énoncé n'est pas définie si un des angles θ_i est nul ou égal à π ; on se limitera à répondre à la question lorsque tous les angles appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$.

Soit $OABC$ un quadrilatère constitué de deux rayons OA, OC du cercle unité et des tangentes à ce cercle, qui se coupent en B . Soit $r \geq 1$ et sous réserve d'existence, D, E les points d'intersection du cercle de centre O et de rayon r avec $[A, B]$ et $[B, C]$. On note θ et α les angles AOC et DOE . Le triangle OAD étant rectangle en A , on a $\cos(\frac{1}{2}(\theta - \alpha)) = 1/r$ avec $0 \leq \alpha \leq \theta$. Par conséquent, si $0 < \theta < \pi$, une condition nécessaire d'existence de D, E est $1/r \geq \cos(\theta/2)$ et cette condition est aussi suffisante car on peut alors déterminer α et construire la figure.



Il en résulte que, pour $0 < \theta < \pi$ et $r \geq 0$, la longueur de l'arc du cercle de centre O et de rayon r intercepté par le quadrilatère $OABC$ est

$$\ell(\theta, r) = \begin{cases} r\theta & \text{si } r \leq 1 \\ r\theta - 2r \arccos(1/r) & \text{si } r > 1 \text{ et } \theta \geq 2 \arccos(1/r) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, à r fixé, $\theta \mapsto \ell(r, \theta)$ est la restriction à $]0, \pi[$ d'une fonction affine par morceaux, convexe sur \mathbf{R} . Comme $h_r(\theta_1, \dots, \theta_n) = \ell(r, \theta_1) + \dots + \ell(r, \theta_n)$, la fonction h_r est Schur-croissante par application de la question 4.2.

4.6) On reprend les notations de la question précédente. Le moment de rotation par rapport à O du quadrilatère $OABC$ est

$$m(\theta) = \int_{\rho=0}^{1/\cos(\theta/2)} \int_{t=0}^{\ell(\rho, \theta)} \rho^3 d\rho dt = \int_{\rho=0}^{+\infty} \rho^3 \ell(\rho, \theta) d\rho.$$

La convexité de $\theta \mapsto \ell(\rho, \theta)$ à ρ fixé implique la convexité de la fonction m . On en déduit que le moment de rotation par rapport à O d'un polygone à n côtés circonscrit au cercle unité est une fonction Schur-croissante des angles associés à ce polygone dans la mesure où tous ces angles sont inférieurs à π . Ainsi, avec cette restriction, le moment minimal est obtenu pour un polygone régulier puisque $(\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi}{n}) \preceq (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Le même raisonnement s'applique au calcul de l'aire en remplaçant ρ^3 par ρ .

Enfin, si l'on lève la restriction $\theta_i < \pi$, alors il n'existe ni moment ni aire minimale : en prenant $\theta_1 = \dots = \theta_{n-1} = \alpha$ et $\theta_n = 2\pi - (n-1)\alpha$, le moment de rotation et l'aire du polygone associé tendent vers zéro quand $\alpha \rightarrow 0^+$.