Problème sur les inégalités de Hlawka

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel.
Soit N une norme définie sur E. L'espace (E, N) sera dit *quadrilatéral* si et seulement si :
(H) $\qquad \forall (x,y,z) \in E^3, \quad N(x)+N(y)+N(z)+N(x+y+z) \geqslant N(x+y)+N(y+z)+N(z+x).$
On fera intervenir la quantité
$$\Delta(x,y,z) = N(x)+N(y)+N(z)+N(x+y+z)-N(x+y)-N(y+z)-N(z+x).$$
On remarque que Δ est symétrique en x, y, z, que $\Delta(-x,-y,-z)=\Delta(x,y,z)$ et enfin que si l'un des vecteurs x, y ou z est nul, $\Delta(x,y,z)=0$.

Partie I : Des exemples, une interprétation géométrique.

1°) Soit $E=\mathbb{R}$ muni de la norme : $x \mapsto |x|$; démontrer que l'espace $(E, |.|)$ est quadrilatéral.
<u>Indication</u> : pour prouver l'inégalité (H), n'envisager que le cas où chacun des réels est différent de 0 et se ramener aux cas (1) $x>0$, $y>0$, $z>0$ et (2) $x>0$, $y>0$, $z<0$.
2°) Soit $E=\mathbb{R}^3$; considérons les normes N_1 et N_∞ définies par :
$$N_1(x) = |x_1|+|x_2|+|x_3|, \qquad N_\infty(x) = \mathrm{Sup}(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$$
où $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.
Démontrer que (E,N_1) est quadrilatéral mais que (E,N_∞) ne l'est pas.
3°) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour f dans E, les normes suivantes (on ne demande pas de prouver que ce sont des normes) :
$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$
a) Montrer que $(E, \|.\|_1)$ est quadrilatéral.
b) Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ ne l'est pas en considérant les fonctions :
$$f_1(x) = 2x^2-1, \quad f_2(x) = x^3-x^2+1, \quad f_3(x) = -x^3-x^2+1.$$
4°) Soit (E,N) un espace quadrilatéral de dimension 3, $\mathcal{E}$ un espace affine attaché à l'espace vectoriel E et d la distance définie sur $\mathcal{E}$ par : $\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2, \quad d(A,B)=N(\overrightarrow{AB})$. Si O une origine de $\mathcal{E}$ et x, y, z trois vecteurs indépendants de E ; on appelle "parallélépipède engendré par x, y, z" (noté $P_{x,y,z}$) l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans le repère $(0,x,y,z)$ valent 0 ou 1. Ces points sont les sommets de $P_{x,y,z}$.
Le segment reliant les sommets de coordonnées (a,b,c) et (a',b',c'), dont la longueur est $N(a-a',b-b',c-c')$ est appelé respectivement "arête", "F-diagonale", "P-diagonale" de $P_{x,y,z}$, selon que la quantité $|a-a'|+|b-b'|+|c-c'|$ vaut respectivement 1, 2 ou 3.
a) Faire un figure illustrant les définitions précédentes.
b) Prouver que le périmètre de $P_{x,y,z}$, somme des longueurs des arêtes, est supérieur ou égal à la somme des longueurs des F-diagonales, diminuée de la somme des longueurs des P-diagonales.

Partie II : Où on montre que tout espace euclidien est quadrilatéral.

Si $(x|x)$ désigne le produit scalaire sur E, on utilise la norme N définie par $\forall x \in E, \quad N(x)=\sqrt{(x|x)}$. Soient x_1, x_2, x_3 3 vecteurs donnés de E et $A=\{1,2,3\}$.
On suppose que <u>$\forall i \in A,\ x_i \neq 0$</u> et on définit :
$$\forall (i,j)\in A^2, \quad i\neq j, \quad T_{ij} = N(x_i)+N(x_j)-N(x_i+x_j).$$
1°) À quelle condition sur x et y, $N(x)+N(y)=N(x+y)$ (x et y pouvant être nuls) ?
2°) On pose
$$\forall (i,j)\in A^2, \quad i\neq j, \quad U_{ij} = N(x_i)+N(x_j)+N(x_i+x_j),$$
$$S_1 = N(x_1)+N(x_2)+N(x_3), \quad S_2 = N(x_1+x_2)+N(x_2+x_3)+N(x_3+x_1), \quad S_3 = N(x_1+x_2+x_3)\,.$$
a) Démontrer que $\forall (i,j)\in A^2, \quad i\neq j, \quad U_{ij} \leqslant S_1+S_3$.
b) Cas d'égalité dans ces inégalités ?
3°) Prouver que
(W) $$(S_1)^2-(S_3)^2 = \sum_{i<j} T_{ij}U_{ij} = T_{12}U_{12}+T_{13}U_{13}+T_{23}U_{23}.$$
4°) Montrer les inégalités
$$\forall (k,l)\in A^2, \quad k<l, \quad (S_1)^2-(S_3)^2 \leqslant T_{kl}(S_1+S_3) + \sum_{\substack{i<j \\ \{i,j\}\neq\{k,l\}}} T_{ij}U_{ij}.$$
En déduire la relation (H).
Donner alors la conclusion dans le cas d'un espace euclidien.
5°) Montrer que si l'inégalité (H) est une égalité pour 3 vecteurs x_1, x_2, x_3, il vient alors :
$$\forall (i,j)\in A^2, \quad i<j, \quad T_{ij}.(S_1+S_3-U_{ij}) = 0.$$
En déduire une relation vérifiée par ces vecteurs supposés 2 à 2 indépendants.

Partie III : Où on montre que tout plan est quadrilatéral.

On sait que, si l'un des vecteurs x, y, z est nul, l'inégalité (H) est satisfaite.
Dans la suite de cette partie, on suppose que les vecteurs x, y, z sont non nuls, $\dim E = 2$.

1°) Prouver qu'il existe 3 réels a, b, c et une permutation φ de l'ensemble $\{x, y, z\}$ tels que :

$$(L) \qquad \begin{cases} a\varphi(x) + b\varphi(y) + c\varphi(z) = 0 \\ a \geqslant b \geqslant 0, \quad a \geqslant c, \quad a > 0 \end{cases}.$$

Il sera posé dans la suite : $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$, $w = \varphi(z)$.

2°) Prouver (H) pour des vecteurs u, v, w tels que $b = 0$.

Indication : montrer que $u = -kw$ avec $k \in]-\infty, 0[\cup]0, 1]$. Distinguer les possibilités $0 < k \leqslant 1$, $k < 0$ et dans la dernière, envisager les 2 cas : les vecteurs v et w sont dépendants ou non.

3°) On suppose, dans cette question $c \geqslant 0$ et $b > 0$.

a) Montrer qu'il existe k et l appartenant à $[0, 1]$ tels que $u + v = kv - lw$.

b) Conclure dans ce cas.

4°) On suppose à présent que $c < 0 < b$.

a) Montrer qu'il existe k et l appartenant à $[0, 1]$ tels que :

$$u + v = kv + l(u + v + w).$$

b) Conclure dans ce cas.

c) Donner alors la conclusion générale de cette partie.

Partie IV : Une généralisation de l'inégalité de Hlawka.

Soient (E, N) un espace normé quadrilatéral, n un entier naturel, $n \geqslant 3$. On note $B = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de E, on pose :

$$\forall k \in B, \quad S_{k,n} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} N(x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}).$$

La sommation, figurant au second membre, est étendue à toutes les suites strictement croissantes de k entiers extraits de B.
On définit enfin les sommes :

$$\forall k \in B \text{ et } 2 \leqslant k \leqslant n-1, \quad R_{k,n} = C_{n-2}^{k-1} S_{1,n} + C_{n-2}^{k-2} S_{n,n} - S_{k,n}$$

$$\forall k \in B \text{ et } k \neq n, \quad Q_{k,n} = C_{n-1}^{k} S_{1,n} + (k-1) S_{k+1,n} - (n-k) S_{k,n}\,.$$

1°) Quel est le signe de $R_{2,3}$? Quelle est la valeur de $Q_{1,n}$?

2°) Prouver que

$$\forall p \in B \text{ et } p \neq 1, \quad R_{p-1,p} \geqslant 0.$$

Indication : démontrer cette relation par récurrence, en considérant pour un $(p+1)$-uplet donné $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ le p-uplet $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p + x_{p+1})$ et le triplet $(x_1 + \cdots + x_{p-1}, x_p, x_{p+1})$.

3°) En appliquant l'inégalité établie ci-dessus ($R_{k,k+1} \geqslant 0$) au $(k+1)$-uplet $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}})$ extrait de la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, montrer l'inégalité :

$$\forall k \in B \text{ et } 2 \leqslant k \leqslant n-1, \quad Q_{k,n} \geqslant 0.$$

4°) Établir, en supposant $n \geqslant 4$, la relation :

$$\forall k \in B \text{ et } 2 \leqslant k \leqslant n-2, \quad Q_{k,n} + (k-1) R_{k+1,n} = (n-k) R_{k,n}.$$

En déduire le signe des nombres $R_{k,n}$ lorsque $2 \leqslant k \leqslant n-2$.