

Concours communs polytechniques 2011-Filière MP- mathématiques 2

EXERCICE

Commutant d'une matrice

- Q1.** • La matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un élément de $C(A)$, donc $C(A) \neq \emptyset$.
 • Soit $(M, N, \lambda) \in C(A)^2 \times \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} A(M + \lambda N) &= AM + \lambda AN \\ &= MA + \lambda NA \\ &= (M + \lambda N)A \end{aligned}$$

Donc $C(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Q2.** $Sp(A) = \{2, 3\}$, 2 est double et 3 est simple. L'espace propre associé à la valeur propre 3 est

$E_3(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 2 est $E_2(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Posons

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, cherchons un vecteur $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Aw = v + 2w$

ce système est équivalent à $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \end{cases}$ on prend $w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors A et T

sont semblable car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases et $A = PTP^{-1}$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Q3.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$.

$M \in C(T) \iff MT = TM$, ce système donne $m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = m_{32} = 0$ et

$m_{22} = m_{33}$, donc $C(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}(E_{11}, E_{22} + E_{33}, E_{23})$, la

famille $(E_{11}, E_{22} + E_{33}, E_{23})$ est libre donc $C(T)$ est de dimension 3.

- Q4.** • L'application $\varphi : P \mapsto P^{-1}MP$ est évidemment linéaire.
 • Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} M \in \ker \varphi &\iff P^{-1}MP = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ &\iff M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Ainsi φ est un automorphisme.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\iff AM = MA \\ &\iff PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \\ &\iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \\ &\iff T\varphi(M) = \varphi(M)T \\ &\iff \varphi(M) \in C(T) \\ &\iff M \in \varphi^{-1}(C(T)) \end{aligned}$$

Donc $C(A) = \varphi^{-1}(C(T))$, φ est un automorphisme, par suite $\dim(C(A)) = 3$.

- Q5.** a/ • De la question 2) la matrice A n'est pas diagonalisable, car $\dim E_2 = 1 \neq 2$.
 • Alors si Π_A désigne le polynôme minimal de A , alors $\Pi_A = (X - 2)^2(X - 3)$.
 • Soit P un polynôme non nul et annulateur de A , alors Π_A divise P , par suite $\deg P \geq 3$.
 Donc il n'existe pas de polynôme non nul annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2.
 • Le polynôme nul est évidemment un polynôme annulateur de A .
- b/ • $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $cI_3 + bA + aA^2$ commute avec A , donc $\text{vect}(I_3, A, A^2) \subset C(A)$.
 • la famille (I_3, A, A^2) est libre, en effet s'ils existent $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $cI_3 + bA + aA^2 = 0$ alors le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est de degré 2 et annulateur de A , absurde avec 5a). Donc les deux sev $C(A)$ et $\text{vect}(I_3, A, A^2)$ ont même dimension, par conséquent $\text{vect}(I_3, A, A^2) = C(A)$.
- c/ Soit $\mathcal{P}_A = \{Q(A) / Q \in \mathbb{R}[X]\}$, il est évident que $\mathcal{P}_A \subset C(A)$, car si $Q \in \mathbb{R}[X]$ $AQ(A) = Q(A)A$ (A commute avec ses puissances), et que les éléments de $\text{vect}(I_3, A, A^2)$ sont des polynômes en A l'égalité en découle.
- Si $A = I_3$ alors $C(A) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_{I_3} = \mathbb{R}I_3$ de dimension 1, donc $C(I_3) \neq \mathcal{P}_{I_3}$.

PROBLÈME

- Q1.** $S \in S_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, il existe $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ qui diagonalise S , soit $X = \sum_{i=1}^n a_i V_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; ${}^tXSX = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i$.
- $\implies$ Si $S \in S_n^+$, alors ${}^tV_iSV_i = \lambda_i \geq 0$.
- $\impliedby$ Si $S \in S_n^+$, alors ${}^tXSX = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i \geq 0$.

PARTIE I

- Q2.** Soit $S \in S_n^+$, alors ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs ou nulle.

On a $\det S = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{tr} S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, l'inégalité $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$ s'écrit $\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{tr} S$.

- Q3.** Application :

- a/ ${}^tMM \in S_n^+$. En effet ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|_2^2 \geq 0$.
- b/ On utilise la question précédente avec $S = {}^tMM$ on a : $\det S = (\det M)^2$, et $\text{tr} S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2$ l'inégalité précédente s'écrit : $(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)^n$.

PARTIE II

- Q4.** a/ $A \in S_n^{++}$, $B \in S_n$. Posons $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\mathcal{B}'(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de (E, φ) donc $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$.
 Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$, posons $U = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $V = \text{mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $U' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $V' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. On a alors $RU' = U$ et $RV' = V$ donc :
 $\varphi(u, v) = {}^tUAV = {}^tU'{}^tR\underline{RAR}V'$, d'autre part $\varphi(u, v) = {}^tU'I_nV'$ car $I_n = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{1 \leq i, j \leq n}$;
 donc ${}^tU'I_nV' = {}^tU'{}^tR\underline{RAR}V'$ et ceci pour tout $U', V' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par suite $I_n = {}^tRAR$.
- b/ On a $C = {}^tRBR$, donc C est symétrique car B l'est aussi et C est à coefficients réels, donc orthogonalement diagonalisable càd $\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que ${}^tQCQ = D$.

c/ On a

$$\begin{aligned} B &= {}^tR^{-1}CR^{-1} \\ &= {}^tR^{-1}QD{}^tQR^{-1} \\ &= {}^tPQP \quad \text{où } P = {}^tQR^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Alors ${}^tPP = {}^tR^{-1}Q{}^tQR^{-1} = {}^tR^{-1}R^{-1} = A$ d'après la question 4.a)

d/ Soit q la forme quadratique dont B est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $q((x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, la signature de q est donc $(1, 0)$

Posons $u = xe_1 + ye_2 = X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2$ où $\mathcal{B}(e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $q(u = X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2) = X^2$. On pose :

$$\begin{cases} x + y = X \\ y = Y \end{cases} \text{ alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ alors } R = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale.

Remarque : La matrice B est de rang 1 donc 0 est l'une de ses valeurs propres, sa trace est 2 donc l'autre valeur propre est 2, il apparaît donc que la signature de q est $(1, 0)$.

Q5. a/ On peut appliquer le résultat de 4.c) ainsi

$$\det(A + B) = \det({}^tPP + {}^tPDP) = \det(P)^2 \det(I_n + D) \text{ et } \det A + \det B = \det({}^tPP) + \det({}^tPDP) = \det(P)^2 [\det(I_n) + \det(D)]$$

Tout revient à montrer que $\det(I_n + D) \geq \det(I_n) + \det(D)$ car $\det P \neq 0$.

Les matrices D et B représentent les matrices de la même forme quadratique dans deux bases, le théorème d'inertie de Sylvester assure que les éléments diagonaux de D sont tous positifs ou nuls.

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, reste à montrer que $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i$, inégalité déjà donnée par l'énoncé.

b/ Supposons que $A, B \in S_n^{++} \setminus S_n^+$, alors $\det A = \det B = 0$, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$ car $A, B \in S_n^+$. Donc $\det(A + B) \geq 0 = \det A + \det B$.

Q6. a/ On applique encore 4.c) et $A = {}^tPP$, $B = {}^tPDP$, donc

$$\det(tA + (1 - t)B) = (\det P)^2 \det(tI_n + (1 - t)D) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1 - t)\lambda_i).$$

b/ Même raisonnement que celui fait en 5.a) les éléments diagonaux de D sont tous strictement positifs, donc $\forall t \in [0, 1]$, $t + (1 - t)\lambda_i > 0$, la concavité de la fonction $\ln$ donne $\ln(t + (1 - t)\lambda_i) \geq t \ln 1 + (1 - t) \ln \lambda_i$, l'inégalité demandé en découle.

c/ On $(\det A)^t (\det B)^{1-t} = (\det P)^2 \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1-t}$, en combinant les questions 6.a) et 6.b), on obtient $\det(tA + (1 - t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.

Q7. a/ Soit $A \in S_n^+$, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $A = QD{}^tQ$, la matrice $A_k = Q \text{diag} \left(\lambda_1 + \frac{1}{k}, \dots, \lambda_n + \frac{1}{k} \right) {}^tQ = A + \frac{1}{k}I_n$ est un élément de S_n^{++} de plus $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$, càd $\overline{S_n^{++}} = S_n^+$.

b/ Soit $(A, B) \in S_n^{++}$, ils existent des suites $(A_k)_k$ et $(B_k)_k$ d'éléments de S_n^{++} tels que $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$ et $B_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} B$.

L'application $\det : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $(\det(A_k + B_k))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A_k)^{\frac{1}{n}} + (\det B_k)^{\frac{1}{n}}$, en passant à la limite, on obtient $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.

- Q8.** a/ Supposons que $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, alors ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ donc ${}^t(T_1T_2^{-1})T_1T_2^{-1} = I_n$ (*), ainsi la matrice $T_1T_2^{-1}$ est orthogonale
D'autre part $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ et $(\mathcal{T}; \cdot)$ est un groupe donc $T_1T_2^{-1} \in \mathcal{T}$, or ${}^t(T_1T_2^{-1})$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à coefficients diagonaux positifs
Posons $T = T_1T_2^{-1}$, la relation (*) entraîne que ${}^tT = T^{-1}$ et $T^{-1} \in \mathcal{T}$, donc T est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure, donc T est une matrice diagonale, (*) donne $T^2 = I_n$ ainsi $T = I_n$ car ses termes diagonaux sont positifs : Par conséquent $T_1 = T_2$.

b/ Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p & p & p \\ \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & p & \cdot & n \end{pmatrix} = {}^tTT$ où $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \leq$

j et $t_{i,j} = 0$ sinon, pour cela posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n t_{ki}t_{kj} = \sum_{1 \leq k \leq \min(i,j)} t_{ki}t_{kj}$ car $t_{p,q} = 0$ si $p > q$.

• $t_{11}t_{1j} = a_{1j} = 1$ donc $t_{11} = 1$ il suffit de prendre $j = 1$ et $t_{1j} = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

• $t_{12}t_{1j} + t_{22}t_{2j} = a_{2j} = 2$ donc $t_{22} = 1$ il suffit de prendre $j = 2$ et $t_{2j} = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et ainsi de suite.

Q9. Un peu d'informatique : On procède de la même façon que précédemment pour obtenir la décomposition.

- Q10.** a/ $S \in S_n^{++}$, donc de la question 8. il existe une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T vérifiant ${}^tTT = S$, posons $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Soit $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} s_{ii} &= \sum_{k=1}^n t_{ki}^2 \\ &\geq t_{ii}^2 \end{aligned}$$

Si ${}^tE_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, 0, \dots, 0)$ alors ${}^tE_i S E_i = s_{ii} > 0$ car S est dans S_n^{++} .

Par conséquent $|t_{ii}| \leq \sqrt{s_{ii}}$, et $\sqrt{\det S} = |\det T| \underbrace{=}_{\text{car } T \text{ est triangulaire}} \prod_{i=1}^n |t_{ii}| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{s_{ii}} =$

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n s_{ii}}, \text{ ce qui donne } \det S \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}.$$

- b/ Posons $S = {}^tMM$, alors S est symétrique et de plus inversible car M l'est aussi. En appliquant la question 10.a) on obtient $(\det M)^2 \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$ et $s_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$, d'où l'inégalité voulu.

Je tiens à remercier les élèves du lycée Thechnique de TAZA qui ont contribué à la réalisation de ce document notamment :

Samih JILILAB ; Noura BOULAHYIA ; Kaoutar L'MAABOUD ; Saâd CHABACH THAMI ; Hind EL YAAGOUBI ; Sanae EL FID ; Ghizlane ASSIOUI et Salima ABAYDI.

Fin du corrigé

sadikoulmeki@yahoo.fr