Concours commun Mines et Ponts

Correction de la seconde épreuve PC ; 2015

Olivier HALGAND

I Préliminaires

1. Par définition :

$$F_2(\lambda) = (1+2\lambda)F_1(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)F_0(\lambda) = (1+2\lambda),$$

et :

$$L_2(\lambda) = (1+2\lambda)L_1(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_0(\lambda) = (1+2\lambda)^2 + 2(1-\lambda-\lambda^2) = 3+2\lambda+2\lambda^2.$$

2. On cherche des matrices $J = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $J^2 = \frac{5}{4}\mathrm{I}$, soit :

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, avec $a = \frac{1}{2}$ et $d = -\frac{1}{2}$, on obtient $bc = 1$. Donc

$$\boxed{\text{les matrices } J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{b} \\ b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ vérifient } J^2 = \frac{5}{4}\mathrm{I}.}$$

3. Soient α et β deux réels tels que : $\alpha\mathrm{I} + \beta J = 0$. Alors : $\beta J = -\alpha\mathrm{I}$ et si $\beta \neq 0$, alors $J = -\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{I}$ ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle J est non multiple de I. On a donc $\beta = 0$ et aussi $\alpha = 0$. Donc :

$$\boxed{\text{les matrices I et } J \text{ sont linéairement indépendantes sur } \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).}$$

II Formule de Moivre généralisée

4. On reconnaît l'écriture de la division euclidienne de $\left(X+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2$ par $X^2-\frac{5}{4}$. Donc on peut trouver deux polynômes $QetT$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant cette égalité, avec $\deg(Q) < \deg\left(X^2-\frac{5}{4}\right) = 2$. De plus, comme $\deg\left(X+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 = \deg\left(X^2-\frac{5}{4}\right)$, on en déduit que $\deg Q = 0$. On peut donc poser $Q = a$ et $T = bX+c$, d'où l'égalité :

$$\left(X+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(X^2-\frac{5}{4}\right)a + (bX+c),$$

soit :

$$X^2 + (1+2\lambda)X + \left(\frac{1}{4}+\lambda+\lambda^2\right) = aX^2 + bX + \left(-\frac{5}{4}\,a + c\right).$$

On obtient donc : $a = 1$, $b = 1+2\lambda$ et $c = \frac{3}{2}+\lambda+\lambda^2$, d'où :

$$\boxed{\left(X+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(X^2-\frac{5}{4}\right)Q(X) + T(X), \quad \text{avec} \quad Q(X) = 1,\ T(X) = (1+2\lambda)X + \left(\frac{3}{2}+\lambda+\lambda^2\right).}$$

5. On a donc, en substituant J à l'indéterminée X dans l'égalité précédente :

$$R(\lambda)^2 = \left(J + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}\right)^2 = \left(J^2 - \frac{5}{4}\,\mathrm{I}\right)Q(J) + T(J) = T(J),$$

car $J^2 - \frac{5}{4}\,\mathrm{I} = 0$. Or : $\frac{3}{2}+\lambda+\lambda^2 = (1+2\lambda)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + (1-\lambda-\lambda^2)$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}(\lambda)^2 &= (1+2\lambda)J + \left((1+2\lambda)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + (1-\lambda-\lambda^2)\right)\mathrm{I} \\
&= (1+2\lambda)\left(J + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}\right) + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I} \\
&= (1+2\lambda)R(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I}.
\end{aligned}$$

6. D'après (8), on a : $R(\lambda)\Big(R(\lambda)-(1+2\lambda)\mathrm{I}\Big)=(1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I}$. Puisque $\lambda\in\mathcal{C}$ par hypothèse, on a $\lambda^2+\lambda-1\neq 0$ et donc on peut écrire :

$$RA=\mathrm{I},\quad \text{avec}\quad A=\frac{1}{1-\lambda-\lambda^2}\,R(\lambda)-\frac{1+2\lambda}{1-\lambda-\lambda^2}\,\mathrm{I}.$$

On en déduit que $\boxed{R(\lambda)\text{ est inversible}}$ et :

$$\begin{aligned}R(\lambda)^{-1}=A&=\frac{1}{1-\lambda-\lambda^2}\,R(\lambda)-\frac{1+2\lambda}{1-\lambda-\lambda^2}\,\mathrm{I}=\frac{1}{1-\lambda-\lambda^2}\,\left(J+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathrm{I}\right)+\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda-1}\,\mathrm{I}\\&=-\frac{1}{\lambda^2+\lambda-1}\,J+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda-1}\,\mathrm{I}.\end{aligned}$$

7. Pour tout entier naurel $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}R(\lambda)^{n+1}=R(\lambda)^nR(\lambda)&=\left(F_n(\lambda)J+\frac{1}{2}L_n(\lambda)\mathrm{I}\right)\left(F_1(\lambda)J+\frac{1}{2}L_1(\lambda)\mathrm{I}\right)\\&=F_n(\lambda)F_1(\lambda)J^2+\frac{1}{2}F_n(\lambda)L_1(\lambda)J+\frac{1}{2}L_n(\lambda)F_1(\lambda)J+\frac{1}{4}L_n(\lambda)L_1(\lambda)I\\&=\left(\frac{1}{2}F_n(\lambda)L_1(\lambda)+\frac{1}{2}F_1(\lambda)L_n(\lambda)\right)J+\left(\frac{5}{4}F_n(\lambda)F_1(\lambda)+\frac{1}{4}L_n(\lambda)L_1(\lambda)\right)\mathrm{I}.\end{aligned}\quad \mathit{car}\ J^2=\tfrac{5}{4}\mathrm{I}$$

Or, on a aussi : $R(\lambda)^{n+1}=F_{n+1}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}$. Les matrices I et J étant linéairement indépendantes d'après 3., on en déduit que :

$$\begin{cases}F_{n+1}(\lambda) &= \dfrac{1}{2}F_n(\lambda)L_1(\lambda)+\dfrac{1}{2}F_1(\lambda)L_n(\lambda)\\[2mm] \dfrac{1}{2}L_{n+1}(\lambda) &= \dfrac{5}{4}F_n(\lambda)F_1(\lambda)+\dfrac{1}{4}L_n(\lambda)L_1(\lambda)\end{cases},$$

d'où :

$$\boxed{\begin{cases}2F_{n+1}(\lambda) &= F_n(\lambda)L_1(\lambda)+F_1(\lambda)L_n(\lambda)\\ 2L_{n+1}(\lambda) &= 5F_n(\lambda)F_1(\lambda)+L_n(\lambda)L_1(\lambda)\end{cases}}.$$

8. Par récurrence sur n :

- **Initialisation** : pour $n=-1$ on a vu que :

$$R(\lambda)^{-1}=-\frac{1}{\lambda^2+\lambda-1}\,J+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2\lambda}{\lambda^2+\lambda-1}\,\mathrm{I}=-\frac{F_1(\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\,J+\frac{1}{2}\cdot\frac{L_1(\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\,\mathrm{I}.$$

  On a donc bien : $R(\lambda)^{-1}=F_{-1}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-1}(\lambda)\mathrm{I}$.

- **Hérédité** : On suppose que $R(\lambda)^{-n}=F_{-n}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-n}(\lambda)\mathrm{I}$ pour un entier $n\geqslant 1$ donné. Alors :

$$\begin{aligned}R(\lambda)^{-n-1}&=R(\lambda)^{-n}R(\lambda)^{-1}\\&=\left(F_{-n}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-n}(\lambda)\mathrm{I}\right)\left(F_{-1}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-1}(\lambda)\mathrm{I}\right)\\&=F_{-n}(\lambda)F_{-1}(\lambda)J^2+\frac{1}{2}F_{-n}(\lambda)L_{-1}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-n}(\lambda)F_{-1}(\lambda)J+\frac{1}{4}L_{-n}(\lambda)L_{-1}(\lambda)\mathrm{I}\\&=\frac{1}{2}\Big(F_{-n}(\lambda)L_{-1}(\lambda)+L_{-n}(\lambda)F_{-1}(\lambda)\Big)J+\frac{1}{4}\Big(5F_{-n}(\lambda)F_{-1}(\lambda)+L_{-n}(\lambda)L_{-1}(\lambda)\Big)\mathrm{I}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{-F_n(\lambda)}{\tilde\lambda^n}\cdot\frac{L_1(\lambda)}{\tilde\lambda}+\frac{L_n(\lambda)}{\tilde\lambda^n}\cdot\frac{-F_1(\lambda)}{\tilde\lambda}\Big)J+\frac{1}{4}\Big(5\frac{-F_n(\lambda)}{\tilde\lambda^n}\cdot\frac{-F_1(\lambda)}{\tilde\lambda}+\frac{L_n(\lambda)}{\tilde\lambda^n}\cdot\frac{L_1(\lambda)}{\tilde\lambda}\Big)\mathrm{I}\\&=\frac{-1}{2\tilde\lambda^{n+1}}\,2F_{n+1}(\lambda)J+\frac{1}{4\tilde\lambda^{n+1}}\,2L_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}\\&=\frac{-F_{n+1}(\lambda)}{\tilde\lambda^{n+1}}\,J+\frac{1}{2}\cdot\frac{L_{n+1}(\lambda)}{\tilde\lambda^{n+1}}\,\mathrm{I}=F_{-n-1}(\lambda)J+\frac{1}{2}L_{-n-1}(\lambda)\mathrm{I}.\end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, on peut conclure que

$$\boxed{\text{la formule de Moivre reste valable pour tout entier négatif.}}$$

III Quelques identités remarquables

9. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
R(\lambda)^2 + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I} - 2JR(\lambda) &= \Big((1+2\lambda)R(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I}\Big) + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I} - 2JR(\lambda)\\
&= \Big((1+2\lambda)\mathrm{I} - 2J\Big)\left(J + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\mathrm{I}\right) + 2(1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I}\\
&= (1+2\lambda)J + \frac{(1+2\lambda)^2}{2}\mathrm{I} - 2J^2 - (1+2\lambda)J + 2(1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I}\\
&= \left(\frac{1+4\lambda+4\lambda^2}{2} - 2\cdot\frac{5}{4} + 2 - 2\lambda - 2\lambda^2\right)\mathrm{I} = 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{R(\lambda)^2 + (1-\lambda-\lambda^2)\mathrm{I} = 2JR(\lambda).}$$

10. • Par définition de $W(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\Big(\mathrm{I} - W(\lambda)\Big)R(\lambda) &= R(\lambda) - \tilde{\lambda}R(\lambda)^{-1}\\
&= J + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\mathrm{I} - \tilde{\lambda}\left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}}J + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2\lambda}{\tilde{\lambda}}\mathrm{I}\right)\\
&= 2J.
\end{aligned}$$

On en déduit donc, en multipliant à droite par $R(\lambda)^{-1}$:

$$\boxed{I - W(\lambda) = 2JR(\lambda)^{-1}.}$$

• De plus, puisque I et J commutent, $R(\lambda)$ commute aussi avec I et J, donc :

$$2JR(\lambda)^{-1}\cdot\frac{2}{5}JR(\lambda) = \frac{4}{5}JR(\lambda)^{-1}R(\lambda)J = \frac{4}{5}J^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\mathrm{I} = \mathrm{I}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\Big(\mathrm{I} - W(\lambda)\Big)^{-1} = \frac{2}{5}JR(\lambda).}$$

11. Par récurrence sur n :

- **Initialisation** : pour $n = 0$ on a :

  $$\tilde{\lambda}^0 R(\lambda)^0 = \mathrm{I} \quad \text{et} \quad F_1(\lambda)\mathrm{I} = \mathrm{I}.$$

  La propriété est donc initialisée.

- **Hérédité** : On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\tilde{\lambda}^k R(\lambda)^{n-2k} = F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}$ pour un entier $n \geqslant 1$ donné. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\tilde{\lambda}^k R(\lambda)^{n+1-2k} &= R(\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n}\tilde{\lambda}^k R(\lambda)^{n-2k}\right) + \tilde{\lambda}^{n+1}R(\lambda)^{-n-1}\\
&= R(\lambda)\Big(F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}\Big) + \tilde{\lambda}^{n+1}R(\lambda)^{-n-1}\\
&= \left(J + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\mathrm{I}\right)F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I} + \tilde{\lambda}^{n+1}\left(F_{-n-1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{-n-1}(\lambda)\mathrm{I}\right)\\
&= F_{n+1}(\lambda)J + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I} - F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}\\
&= \frac{1}{2}\Big((1+2\lambda)F_{n+1}(\lambda) + L_{n+1}(\lambda)\Big)\mathrm{I}\\
&= \frac{1}{2}\Big(L_1(\lambda)F_{n+1}(\lambda) + F_1(\lambda)L_{n+1}(\lambda)\Big)\mathrm{I}\\
&= F_{n+2}(\lambda)\mathrm{I}.
\end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (\lambda^2 + \lambda - 1)^k R(\lambda)^{n-2k} = F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}.}$$

12. D'après 8. et 11., on a pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}^k \Big(F_{n-2k}(\lambda) J + \frac{1}{2} L_{n-2k}(\lambda)\mathrm{I} \Big) = F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I},$$

soit :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}^k F_{n-2k}(\lambda) \right) J + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}^k L_{n-2k}(\lambda) \right) \mathrm{I} = F_{n+1}(\lambda)\mathrm{I}.$$

Les matrices I et J étant linéairement indépendantes, cela signifie que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}^k F_{n-2k}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \tilde{\lambda}^k L_{n-2k}(\lambda) = 2F_{n+1}(\lambda).}$$

13. Tout d'abord :

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 1 + 2\lambda \\ 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda + 2\lambda^2 \end{vmatrix} = (6 + 4\lambda + 4\lambda^2) - (1 + 4\lambda + 4\lambda^2) = 5.$$

Ensuite, pour tout $k \geqslant 1$ et en utilisant la formule (2), on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{k+1}(\lambda) &= L_k(\lambda) L_{k+2}(\lambda) - L_{k+1}(\lambda)^2 \\
&= L_k(\lambda)\Big((1 + 2\lambda) L_{k+1}(\lambda) - \tilde{\lambda} L_k(\lambda) \Big) - L_{k+1}(\lambda)\Big((1 + 2\lambda) L_k(\lambda) - \tilde{\lambda} L_{k-1}(\lambda) \Big) \\
&= -\tilde{\lambda} L_k(\lambda)^2 + \tilde{\lambda} L_{k+1}(\lambda) L_{k-1}(\lambda) \\
&= \tilde{\lambda} \Delta_k(\lambda).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } \Big(\Delta_k(\lambda)\Big)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite géométrique de raison } \tilde{\lambda} \text{ et de premier terme } \Delta_1(\lambda) = 5.}$$

14. Soit $k \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
L_k(\lambda)^2 P\left(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)} \right) &= L_k(\lambda)^2 \left(-\tilde{\lambda} \, \frac{L_{k-1}(\lambda)^2}{L_k(\lambda)^2} + (1 + 2\lambda) \, \frac{{}_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)} - 1 \right) \\
&= -\tilde{\lambda} L_{k-1}(\lambda)^2 + (1 + 2\lambda) L_k(\lambda) L_{k-1}(\lambda) - L_k(\lambda)^2 \\
&= \Big(-\tilde{\lambda} L_{k-1}(\lambda) + (1 + 2\lambda) L_k(\lambda) \Big) L_{k-1}(\lambda) - L_k(\lambda)^2 \\
&= L_{k+1}(\lambda) L_{k-1}(\lambda) - L_k(\lambda)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad L_k(\lambda)^2 P\left(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)} \right) = \Delta_k(\lambda) = 5 \, \tilde{\lambda}^{k-1}.}$$

15. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{L_k} \, J R(0)^k &= \frac{2}{L_k} \, J \Big(F_k J + \frac{1}{2} \, L_k \mathrm{I} \Big) = 2 \, \frac{F_k}{L_k} \, J^2 + J = \frac{F_k}{L_k} \, \frac{5}{2} \, \mathrm{I} + J \\
&= \frac{L_{k+1} + L_{k-1}}{2L_k} \, \mathrm{I} + J = \frac{L_k + 2L_{k-1}}{2L_k} \, \mathrm{I} + J = \left(\frac{L_{k-1}}{L_k} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{I} + J,
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\frac{2}{L_k} J R(0)^k = R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k} \right).}$$

16. D'après 8., on sait que :

$$R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)^{2n} = F_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) J + \frac{1}{2}\, L_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) \mathrm{I}.$$

Et, d'après 15. on a aussi, puisque J et $R(0)$ commutent :

$$R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{L_k}\, JR(0)^k\right)^{2n} = \frac{2^{2n}}{L_k^{2n}}\, J^{2n} R(0)^{2kn}.$$

Or, $J^{2n} = (J^2)^n = \left(\frac{5}{4}\,\mathrm{I}\right)^n = \frac{5^n}{2^{2n}}\,\mathrm{I}$. Donc :

$$R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right)^{2n} = \frac{2^{2n}}{L_k^{2n}} \cdot \frac{5^n}{2^{2n}}\left(F_{2kn} J + \frac{1}{2} L_{2kn}\mathrm{I}\right) = \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, F_{2kn} J + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, L_{2kn}\mathrm{I}.$$

Donc, puisque les matrices I et J sont linéairement indépendantes, on a :

$$\boxed{F_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, F_{2kn} \quad \text{et} \quad L_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, L_{2kn}.}$$

IV Une touche de probabilités

17. • Démontrons que : $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ p_k \geqslant 0$.

Il est évident que si $i \in \mathbb{N}$, alors $L_i > 0$. De plus, on a : $L_1 = 1$, $L_0 = 2$ et donc on obtient successivement : $L_{-1} = -1$, $L_{-2} = 3$, $L_{-3} = -4$. Démontrons donc par récurrence que, pour tout $i \in \mathbb{N}$: si i est pair, alors $L_{-i} > 0$, et si i est impair alors $L_{-i} < 0$. L'initialisation ayant déjà été effectuée, supposons que la propriété soit vérifiée jusqu'au rang i. On a : $L_{-i-1} = L_{-i+1} - L_{-i}$. Donc :

– si i est pair, alors $L_{-i} > 0$ et $L_{-i+1} < 0$ donc : $L_{-i-1} < 0$;

– si i est impair, alors $L_{-i} < 0$ et $L_{-i+1} > 0$ donc : $L_{-i-1} > 0$.

La propriété est donc héréditaire.

On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, 2n]\!]$:

– si i est pair, ou impair et positif, alors $L_i > 0$, $L_{2i(n-k)} > 0$ et $L_{i(2n+1)} > 0$, donc : $p_k > 0$;

– si i est impair et négatif, alors $L_i < 0$, $L_{2i(n-k)} > 0$ et $L_{i(2n+1)} < 0$, donc : $p_k > 0$.

Dans tous les cas on a donc : $p_k > 0$.

• Exprimons $L_{i(2n+1)}$. On a donc d'après les formules (14) :

$$\begin{aligned}
L_{i(2n+1)} &= \frac{L_i^{2n+1}}{5^n}\, F_{2n+1}\left(\frac{L_{i-1}}{L_i}\right) && \textit{d'après 12.}\\
&= \frac{L_i^{2n+1}}{5^n} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{L_{i-1}^2}{L_i^2} + \frac{L_{i-1}}{L_i} - 1\right)^k L_{2n-2k}\left(\frac{L_{i-1}}{L_i}\right) && \textit{d'après (13)}\\
&= \frac{L_i^{2n+1}}{5^n} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2)^k}{L_i^{2k}} \cdot \frac{5^{n-k}}{L_i^{2n-2k}}\, L_{(2n-2k)i}\\
&= L_i \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(L_{i+1}L_{i-1} - L_i^2)^k}{5^k}\, L_{2i(n-k)} && \textit{d'après 13.}\\
&= \frac{L_i}{2} \sum_{k=0}^{2n} L_{2i(n-k)}
\end{aligned}$$

• Calculons enfin la somme des p_k grâce à l'expression de $L_{i(2n+1)}$ obtenue :

$$\sum_{k=0}^{2n} p_k = \frac{L_i}{2L_{i(2n+1)}} \sum_{k=0}^{2n} L_{2i(n-k)} = 1.$$

$$\boxed{\text{la suite } (p_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2n} \text{ définit une probabilité.}}$$