

# Mines MP 2013 - Epreuve 1

## A. Formes bilinéaires symétriques plates.

### 1) Question de cours.

• Comme  $\varphi$  est une forme bilinéaire, l'application  $\tilde{\varphi} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x, \cdot)$  est linéaire de  $E = \mathbb{R}^n$  dans son dual  $E^* = (\mathbb{R}^n)^*$ . Par ailleurs, comme  $\mathbb{R}^n$  est de dimension finie,  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel est un espace euclidien donc le théorème de représentation des formes linéaires assure que  $\Psi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^n)^*$  est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Ainsi  $[\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n] \iff [\tilde{\varphi}(x) = (\Psi \circ u)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n] \iff \tilde{\varphi} = \Psi \circ u$

Comme  $\Psi$  est bijectif, on a donc  $[\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n] \iff u = \Psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ . Ainsi  $u$  existe et est unique, de plus  $u$  est linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même par composition d'applications linéaires.

Comme  $\varphi$  est symétrique, on a pour tout  $(x; y)$  de  $(\mathbb{R}^n)^2$  :

$\langle u(x), y \rangle = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = \langle u(y), x \rangle = \langle x, u(y) \rangle$  (par symétrie du produit scalaire)

Ainsi  $u$  est bien symétrique.

• Comme  $u$  est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres pour  $u$ . Ainsi en notant  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $e_i$ , on obtient pour tout  $i \neq j$  :  $\varphi(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$

Ainsi  $\varphi$  est bien diagonalisable.

2) • L'application  $a \otimes b$  est bien définie de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ; elle est bilinéaire car  $(a \otimes b)(x, \cdot) = a(x)b$  est linéaire (puisque  $a(x)$  est un réel et  $b$  est linéaire) et  $(a \otimes b)(\cdot, x) = b(x)a$  aussi et ce pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ .

• Si  $a$  est nulle alors  $a \otimes b$  est symétrique car c'est l'application nulle.

Si  $a$  n'est pas nulle alors soit  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $a(x_0) \neq 0$ .

Analysons la situation : si  $a \otimes b$  est symétrique alors pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a  $(a \otimes b)(x_0, y) = (a \otimes b)(y, x_0)$  i.e.  $a(x_0)b(y) = b(x_0)a(y)$  donc  $b = \mu a$  avec  $\mu = b(x_0)/a(x_0)$  (car  $a(x_0) \in \mathbb{R}^*$ ).

Réciproquement si  $b$  s'écrit  $\mu a$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  alors  $a \otimes b = \mu a \otimes a$  donc est symétrique puisque dans  $(a \otimes b)(x, y) = \mu a(x), a(y)$  les rôles de  $x$  et  $y$  sont bien symétriques.

Enfin  $a \otimes b$  est symétrique si et seulement si  $a = 0$  ou  $(a, b)$  est liée, donc finalement si et seulement si  $a$  et  $b$  sont liées.

3) D'après la question 1.,  $\varphi$  est diagonalisable donc il existe une base  $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle  $\varphi(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Dans la base  $\mathcal{E}$ , la matrice  $M$  de  $\varphi$  est donc diagonale avec en ligne  $i$  et colonne  $i$  le réel  $\varphi(e_i, e_i)$ . Par hypothèse  $M$  est de rang 1 car  $\varphi$  l'est, tous les coefficients diagonaux  $\varphi(e_i, e_i)$  de  $M$  sont donc nuls sauf un. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de la base  $\mathcal{E}$ , on suppose  $\mu = \varphi(e_1, e_1) \neq 0$  et  $\varphi(e_i, e_i) = 0$  pour tout  $i = 2 \dots n$

Alors on pose  $f = \sqrt{|\mu|}e^*$  avec  $e^*$  l'unique forme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  qui envoie  $e_1$  sur 1 et les  $e_i$  pour  $i$  de 2 à  $n$  sur 0 (i.e.  $e^*$  est l'application première coordonnée dans  $\mathcal{E}$ ). On obtient alors  $f \otimes f = |\mu|e^* \otimes e^*$  donc  $\varphi = f \otimes f$  si  $\mu > 0$  et  $\varphi = -f \otimes f$ , l'égalité des applications bilinéaires étant obtenue en observant qu'elles ont même matrice dans la base  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

4) Avec les notations de la questions précédentes, si  $\varphi$  est de rang 1 alors il existe  $\varepsilon = \pm 1$  et une forme linéaire  $f$  avec  $\varphi = \varepsilon f \otimes f$ . Ainsi pour tout  $x, y, z$  et  $w$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$\langle \varphi(x, y), \varphi(z, w) \rangle = \varphi(x, y)\varphi(z, w) = \varepsilon^2 f(x) f(y) f(z) f(w) = \varepsilon^2 f(x) f(w) f(z) f(y) = \langle \varphi(x, w), \varphi(z, y) \rangle$

Ainsi une forme bilinéaire de rang 1 est toujours plate.

5) Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire plate non nulle alors via la question 1, elle est diagonalisable et il existe une base  $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle  $\varphi(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Dans la base  $\mathcal{E}$ , la matrice de  $\varphi$  est diagonale et non nulle (car  $\varphi$  est supposée non nulle), donc il existe  $\ell$  avec  $\varphi(e_\ell, e_\ell) \neq 0$ . Comme  $\varphi$  est plate, on obtient

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq \ell$ ,  $\langle \varphi(e_\ell, e_\ell), \varphi(e_i, e_i) \rangle = \langle \varphi(e_\ell, e_i), \varphi(e_\ell, e_i) \rangle$  i.e.  $\varphi(e_\ell, e_\ell) \cdot \varphi(e_i, e_i) = 0$

Donc comme  $\varphi(e_\ell, e_\ell) \neq 0$ , on a  $\varphi(e_i, e_i) = 0$  pour tout  $i \neq \ell$ . Ainsi la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{E}$  est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sauf un (celui ligne  $\ell$ ) sont nuls donc elle est de rang 1 et donc  $\varphi$  est de rang 1.

### B. Diagonalisation simultanée.

**6) •** Si  $u_{i_0}$  admet un sous-espace propre (pour la valeur propre  $\lambda$ ) de dimension  $n$  alors ce sous-espace propre est  $E$  tout entier car inclus dans  $E$  et de même dimension que  $E$ , et  $u_{i_0} = \lambda Id$  donc  $u$  est une homothétie ce qui n'est pas. Ainsi les sous-espaces propres de  $u_{i_0}$  sont tous de dimension strictement inférieure à  $n$ .

• Redémontrons que si deux endomorphismes commutent, tout espace propre de l'un est stable par l'autre. Soit  $u$  un endomorphisme commutant avec  $u_{i_0}$ , alors pour tout  $x$  dans le sous-espace propre de  $u_{i_0}$  associé à la valeur propre  $\mu$ , on a

$$u_{i_0}(u(x)) = (u_{i_0} \circ u)(x) = (u \circ u_{i_0})(x) = u(u_{i_0}(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \text{ par linéarité de } u.$$

Ainsi  $u(x)$  appartient à  $\ker(u_{i_0} - \mu Id)$ , le sous-espace propre de  $u_{i_0}$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Ainsi tout sous-espace propre de  $u_{i_0}$  est stable par tout  $u_i$  (car  $u_i$  commute avec  $u_{i_0}$ ).

**7) •** Si tous les endomorphismes  $u_i$  sont des homothéties alors dans toute base orthonormée de  $E$ , tous les  $u_i$  ont une matrice diagonale (même scalaire).

• Sinon, on choisit  $i_0$  tel que  $u_{i_0}$  ne soit pas une homothétie, alors d'après le théorème spectral,  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u_{i_0}$ .

Soit  $F$  un sous-espace propre de  $u_{i_0}$ , alors via la question **6.**,  $F$  est stable par tous les  $u_i$  donc on peut considérer les endomorphismes  $\tilde{u}_i^F$  induits sur  $F$  par les  $u_i$ .

Ces endomorphismes  $\tilde{u}_i^F$  sont autoadjoints car les  $u_i$  le sont, et commutent deux à deux car les  $u_j$  commutent deux à deux. Donc par hypothèse de récurrence comme  $F$  est de dimension strictement inférieure à  $n$  (via la question **6.**), il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}_F$  de  $F$  dans laquelle les matrices de  $\tilde{u}_i^F$  sont toutes diagonales.

La réunion (concaténation) des bases orthonormées  $\mathcal{B}_F$  de  $F$ , quand  $F$  décrit la famille finie des sous-espaces propres de  $u_{i_0}$ , donne une base  $\mathcal{B}$  orthonormée de  $E$  (car  $E$  est somme directe orthogonale de ces sous-espaces). Dans  $\mathcal{B}$ , la matrice de  $u_i$  est diagonale par blocs avec pour blocs les matrices  $\tilde{u}_i^F$  dans les bases  $\mathcal{B}_F$  des sous-espaces propres de  $u_{i_0}$  qui sont diagonales par choix des  $\mathcal{B}_F$ . Ainsi on a trouvé une base orthonormée de  $E$  dans laquelle tous les  $u_i$  ont une matrice diagonale.

• On a vu que le résultat que l'on veut prouver est vrai pour  $\dim(E) = 1$ , qu'il est récurrent (s'il est vrai pour tout  $E$  avec  $\dim(E) < n$  alors il reste vrai pour tout  $E$  de dimension  $n$  donc pour tout  $E$  de dimension strictement inférieure à  $n + 1$ ). Donc par le principe de récurrence, il est vrai pour tout  $n$ .

### C. Vecteurs réguliers.

**8) •** Si  $B$  est inversible alors  $\det(A + tB) = \det((AB^{-1} + tI)B) = \det(B) \det(AB^{-1} + tI)$  or  $A + tB$  est inversible si et seulement si  $\det(A + tB) \neq 0$  donc comme  $\det(B) \neq 0$ , on trouve que  $A + tB$  est inversible si et seulement si  $\det(AB^{-1} + tI) \neq 0$  i.e.  $-t$  n'est pas racine du polynôme caractéristique de  $AB^{-1}$  qui admet au plus  $n$  racines donc  $A + tB$  est inversible pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  sauf pour au plus  $n$  valeurs.

Si  $A$  est inversible alors  $\det(A) \neq 0$  et pour tout  $t \neq 0$ , on a  $\det(A + tB) = \det(t(t^{-1}I + BA^{-1})A) = t^n \det(A) \det(t^{-1}I + BA^{-1})$ . Donc pour  $t \neq 0$ ,  $A + tB$  est inversible si et seulement si  $\det(A + tB) \neq 0$  i.e.  $\det(t^{-1}I + BA^{-1}) \neq 0$  i.e.  $-t^{-1}$  non racine du polynôme caractéristique de  $BA^{-1}$  (qui en admet au plus  $n$ ). Ainsi  $A + tB$  est inversible sauf peut-être pour  $n + 1$  valeurs de  $t$ .

Enfinement si  $A$  ou  $B$  est inversible,  $A + tB$  est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de  $t$ .

### Autre méthode.

Comme d'une part le déterminant d'une matrice est polynomial en les coefficients de la matrice, et d'autre part les coefficients de  $A + tB$  sont polynomiaux en  $t$ , il résulte que  $\det(A + tB)$  est un polynôme  $P$

en  $t$ . Or si  $A$  est inversible,  $P(0) = \det(A) \neq 0$ , et sinon  $B$  est inversible et  $P(0) = \det(A) = 0$  avec  $t^n P(1/t) = \det(tA + B)$  qui tend vers  $\det(B) \neq 0$  quand  $t$  tend vers 0 ce qui prouve que  $t^n P(1/t)$  donc  $P(1/t)$  n'est pas nul pour  $t$  assez grand, ainsi  $P$  n'est pas un polynôme constant. Donc  $P$  admet un nombre fini de racines et  $P(t) = \det(A + tB)$  est non nul sauf pour un nombre fini de valeurs de  $t$ , ainsi  $A + tB$  est inversible sauf pour ce nombre fini de valeurs de  $t$ .

**9.** La famille  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  de  $\mathbb{R}^p$  étant libre, on a  $r \leq p$  et via le théorème de la base incomplète, on complète cette famille en une base  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  de  $\mathbb{R}^p$ . On complète la famille  $(b_1, \dots, b_r)$  par des vecteurs nuls en  $(b_1, \dots, b_p)$ .

On note  $A$  la matrice de  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  (i.e. la matrice dont la  $j$ ème colonne est formée des coordonnées de  $a_j$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ) et  $B$  celle de  $(b_1, b_2, \dots, b_p)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . La première famille étant libre,  $A$  est inversible donc via la question **8.**, la matrice  $A + tB$  est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de  $t$  (disons  $A + tB$  non inversible pour  $t$  dans  $J$ ). Or  $A + tB$  est la matrice de  $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_p + tb_p)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , donc pour  $t \notin J$ , cette famille est libre et la sous-famille  $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_r + tb_r)$  aussi.

Ainsi  $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_r + tb_r)$  est libre sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de  $t$  (celles de  $J$ ).

**10.** Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $y$  dans  $\ker \tilde{\varphi}(v)$  i.e.  $\varphi(v, y) = 0$ . Comme  $v$  est régulier pour  $\varphi$ , l'image  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$  est de dimension  $q$ , donc il existe une famille libre  $(e_1, \dots, e_q)$  telle que  $(\tilde{\varphi}(v)(e_i))_{1 \leq i \leq q}$  engendre  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ . Supposons (par l'absurde) que  $\varphi(x, y)$  n'est pas dans  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ . Ainsi la famille  $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q), \varphi(x, y))$  i.e.  $(\varphi(v, e_1), \dots, \varphi(v, e_q), \varphi(x, y))$  est libre. Donc via la question **9.**, il existe un voisinage  $V$  de 0 tel que pour tout  $t \in V$ , la famille  $f = (\varphi(v, e_1) + t\varphi(x, e_1), \dots, \varphi(v, e_q) + t\varphi(x, e_q), \varphi(x, y) + t0)$  est libre. Par linéarité de  $\varphi$ , la famille  $f = (\varphi(v + tx, e_1), \dots, \varphi(v + tx, e_q), \varphi(x, y))$  est libre, pour tout  $t$  dans  $V$ . Donc en choisissant  $s$  dans  $V$  avec  $s \neq 0$ , la famille  $(\varphi(v + sx, e_1), \dots, \varphi(v + sx, e_q), s\varphi(x, y))$  est libre et comme  $\varphi(v, y) = 0$ , on obtient la liberté de  $(\varphi(v + sx, e_1), \dots, \varphi(v + sx, e_q), \varphi(v + sx, y))$  i.e. de  $g(e_1), \dots, g(e_q), g(y)$  avec  $g = \tilde{\varphi}(v + sx)$ . Ainsi  $\text{Im} g = \text{Im} \tilde{\varphi}(v + sx)$  est de dimension au moins  $1 + q$  ce qui contredit la définition de  $q$ . Donc  $\varphi(x, y)$  appartient à  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ .

**11.** • Procédons par double inclusion.

Soit  $x$  dans  $\ker \varphi$ . Alors par définition  $\tilde{\varphi}(x) = 0$  donc  $\varphi(x, v) = \tilde{\varphi}(x)(v) = 0$  et par symétrie de  $\varphi$ , on a bien  $\tilde{\varphi}(v)(x) = \varphi(v, x) = \tilde{\varphi}(x)(v) = 0$ . Donc  $x$  est dans  $\ker \tilde{\varphi}(v)$ . Ainsi  $\ker \varphi \subset \ker \tilde{\varphi}(v)$ .

Réciproquement, soit  $y$  dans  $\ker \tilde{\varphi}(v)$ . Fixons  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ . D'après la question **10.**, le vecteur  $\varphi(x, y)$  est dans  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$  i.e. il existe  $z_x$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\varphi(x, y) = \varphi(v, z_x)$ . Ainsi dans  $\mathbb{R}^p$ , on a

$$\langle \varphi(x, y, \varphi(x, y)) \rangle = \langle \varphi(v, z_x, \varphi(x, y)) \rangle = \langle \varphi(v, y), \varphi(x, z_x) \rangle \text{ (car } \varphi \text{ est plate).}$$

Or  $\varphi(v, y) = (\tilde{\varphi}(v))(y) = 0$  donc  $\|\varphi(x, y)\|^2 = \langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle = 0$  et donc  $\|\varphi(x, y)\| = 0$  i.e. par séparation d'une norme  $(\tilde{\varphi}(y))(x) = \varphi(x, y) = 0$ . Ainsi tout  $x$  est dans le noyau de  $\tilde{\varphi}(y)$  donc  $\tilde{\varphi}(y)$  est nul donc par définition  $y$  est dans  $\ker \varphi$ .

Finalement, pour tout vecteur régulier  $v$  de  $\varphi$ , les noyaux  $\ker \tilde{\varphi}(v)$  et  $\ker \varphi$  sont égaux.

• Si  $\ker \varphi = \{0\}$  alors en considérant un vecteur régulier  $v$  pour  $\varphi$ , l'application  $\tilde{\varphi}(v)$  est linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , injective car de noyau  $\ker \tilde{\varphi}(v) = \ker \varphi$  réduit à  $\{0\}$ . Donc  $\dim \mathbb{R}^p \geq \dim \mathbb{R}^n$  i.e.  $p \geq n$ .

**12.** Soit  $v$  régulier pour  $\varphi$ . Alors  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$  est de dimension  $q$  donc il existe une famille libre  $(e_1, \dots, e_q)$  telle que  $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q))$  est une base de  $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ . Via le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs  $f_1, \dots, f_r$  tels que  $\mathcal{B} = (\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q), f_1, \dots, f_r)$  est une base de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors par linéarité de  $x \mapsto \tilde{\varphi}(x)$ , l'application  $\Psi_v : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$  est polynomiale en les coordonnées de  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , donc continue. Elle vaut 1 en  $v$  donc il existe un voisinage  $\mathcal{W}_v$  de  $v$  dans  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $\Psi_v$  ne s'annule pas. Ainsi pour tout  $x$  dans  $\mathcal{W}_v$ , la famille  $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$  est libre donc la sous-famille  $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q))$  aussi ce qui prouve que  $\text{Im} \tilde{\varphi}(x)$  est de dimension au moins  $q$  donc  $q$  car  $q$  est la dimension maximale d'une telle image par définition. Ainsi  $x$  est un vecteur régulier.

Finalement tout vecteur régulier admet un voisinage formé uniquement de vecteurs réguliers donc

l'ensemble  $\mathcal{V}$  des vecteurs réguliers pour  $\varphi$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**13.** Soit  $x$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et  $v$  un vecteur régulier pour  $\varphi$ . Avec les notations de la question précédente, la matrice de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}$  i.e.  $B = I_p$  est inversible. Donc en notant  $A$  la matrice de la famille  $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$  dans  $\mathcal{B}$ , la question **8.** assure que  $A + tB$  est inversible pour tout réel  $t$  sauf peut-être ceux d'un ensemble fini  $T$ . De plus  $A + tB$  est, par bilinéarité de  $\varphi$ , la matrice de  $(\tilde{\varphi}(x + tv)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + tv)(e_q), (1 + t)f_1, \dots, (1 + t)f_r)$  dans  $\mathcal{B}$ .

Notons  $\varepsilon > 0$  le minimum de  $T \cap \mathbb{R}_+^*$  si cet ensemble est non vide, et 1 sinon. Alors pour tout entier  $m > 1/T$ , la matrice  $A + \frac{1}{m}B$  de  $(\tilde{\varphi}(x + v/m)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + v/m)(e_q), f_1, \dots, f_r)$  dans  $\mathcal{B}$  est inversible donc  $(\tilde{\varphi}(x + v/m)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + v/m)(e_q))$  est libre et comme dans la question **12.** cela permet de conclure que  $x + v/m$  est un vecteur régulier pour  $\varphi$ . Ainsi la suite  $(x + v/m)_{m > [1/T]+1}$  (avec  $[\cdot]$  la partie entière) est une suite de vecteurs réguliers pour  $\varphi$  qui converge vers  $x$ .

Cela prouve que tout vecteur  $x$  est dans l'adhérence de  $\mathcal{V}$  i.e.  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### D. Le cas $p = n$ de noyau nul.

**14.** Comme  $\varphi$  est bilinéaire, symétrique et plate, et  $v$  est un vecteur régulier pour  $\varphi$ , la question **11.** assure que le noyau  $\ker \tilde{\varphi}(v)$  vaut  $\ker \varphi$  donc est réduit au vecteur nul. Ainsi l'application linéaire  $\tilde{\varphi}(v)$  est injective et est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  (car  $p = n$  donc  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p$ ). Donc (par le théorème du rang par exemple) l'endomorphisme  $\tilde{\varphi}(v)$  est un automorphisme.

**15.** Pour tout  $u$  et  $w$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a, en notant  $u' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(u)$  et  $w' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(w)$  :

$$\langle \Psi(x)(u), w \rangle = \langle \tilde{\varphi}(x)(u'), \tilde{\varphi}(v)(w') \rangle = \langle \varphi(x, u'), \varphi(v, w') \rangle$$

or comme  $\varphi$  est plate, on a  $\langle \varphi(x, u'), \varphi(v, w') \rangle = \langle \varphi(x, w'), \varphi(v, u') \rangle$  donc par ce qui précède

$$\langle \Psi(x)(u), w \rangle = \langle \Psi(x)(w), u \rangle = \langle u, \Psi(x)(w), \rangle \text{ (par symétrie du produit scalaire).}$$

Ainsi  $\Psi(x)$  est bien autoadjoint pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**16. •** Pour tout  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  et tout  $w$  et  $z$  de  $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$ , on a, toujours en notant  $w' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(w)$  et  $z' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(z)$

$$\begin{aligned} \langle (\Psi(x) \circ \Psi(y))(z), w \rangle &= \langle (\Psi(y))(z), \Psi(x)(w) \rangle \text{ car } \Psi(x) \text{ est autoadjoint via } \mathbf{15.} \\ &= \langle \varphi(y, z'), \varphi(x, w') \rangle \text{ par définition de } \Psi \\ &= \langle \varphi(y, w'), \varphi(x, z') \rangle \text{ car } \varphi \text{ est plate} \\ &= \langle \Psi(y)(w), \Psi(x)(z) \rangle \\ &= \langle w, (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z) \rangle \text{ car } \Psi(y) \text{ est autoadjoint via } \mathbf{15.} \\ &= \langle (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z), w \rangle \text{ par symétrie du produit scalaire} \end{aligned}$$

Ainsi par linéarité de  $\langle \cdot, w \rangle$ , le vecteur  $(\Psi(x) \circ \Psi(y))(z) - (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z)$  est orthogonal à tout vecteur  $w$  de  $\mathbb{R}^n$  donc est nul, et ce pour tout vecteur  $z$  de  $\mathbb{R}^n$  donc  $\Psi(x) \circ \Psi(y) = \Psi(y) \circ \Psi(x)$ .

• Les  $\Psi(x)$  forment une famille d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ , autodajoints (question **15.** qui commutent 2 à 2 donc via les questions de **B.**, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle tous les  $\Psi(x)$  ont une matrice diagonale.

**17.** Via la question **14.**,  $\tilde{\varphi}(v)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$  donc  $(f_1 = (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_1), \dots, f_n = (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_n))$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Or pour tout  $i = 1 \dots n$ , chaque  $e_j$  est vecteur propre de  $\Psi(f_i)$  via la question **16.** donc il existe  $\lambda_i(j) \in \mathbb{R}$  avec  $(\Psi(f_i))(e_j) = \lambda_i(j) e_j$ .

Ainsi pour tout  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , on a :  $\varphi(f_i, f_j) = (\tilde{\varphi}(f_i))((\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_j)) = \Psi(f_i)(e_j) = \lambda_i(j) e_j$

et par symétrie de  $\varphi$ , on a aussi  $\varphi(f_i, f_j) = \varphi(f_j, f_i) = \lambda_j(i) e_i$ .

Mais la famille  $(e_i, e_j)$  est libre (comme sous-famille d'une base de  $\mathbb{R}^n$  donc  $\lambda_i(j) e_j = \lambda_j(i) e_i$  impose  $\lambda_j(i) = \lambda_i(j) = 0$  donc  $\varphi(f_i, f_j) = 0$ ).

Finalement à l'aide de la base  $((\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_1), \dots, (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_n))$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a obtenu que  $\varphi$  est diagonalisable.