

**EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS
PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'**

Epreuve de la banque de notes pour : L'ISIMA - L'ECOLE NAVALE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures

Notations :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On notera $E^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} dans E

et $E[x]$ le sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions polynômiales, c'est-à-dire défini par :

$$F \in E[x] \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \text{ou bien } F \text{ est identiquement nulle :} \\ ii) & \text{ou bien } \exists n \in \mathbb{N}. \exists (a_0, \dots, a_n) \in E^n \times (E \setminus \{0\}), \\ & \forall x \in \mathbb{R}. F(x) = x^n a_n + \dots + x a_1 + a_0. \end{cases}$$

On définira le degré de l'application F comme étant $\begin{cases} -\infty & \text{dans le cas } i), \\ n & \text{dans le cas } ii), \end{cases}$

et on notera $E_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $E[x]$ formé des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n .

Par ailleurs, soit f une application de \mathbb{R}^n dans E . On rappelle que pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on peut définir l'application de \mathbb{R} dans E qui à x associe $f(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_n)$. Cette application est appelée la j -ième application partielle de f au point u .

Enfin, S_n désignera le groupe symétrique de degré n (ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même) et si X est un ensemble fini, $|X|$ désignera son cardinal.

1 Fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 1 et fonctions affines.

Soit g une application de \mathbb{R} dans E .

Définition 1 On dira que g est une fonction **affine** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2).$$

Soient x_0 et x_1 deux nombres réels **distincts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Question 1.1

Calculer (en fonction de x_0, x_1 et x) les deux réels α et β vérifiant : $x = \alpha x_0 + \beta x_1$ et $\alpha + \beta = 1$.

Question 1.2

En supposant que l'application g est une fonction affine, déduire de la question précédente l'expression de $g(x)$ en fonction (uniquement) de $g(x_0), g(x_1), x_0, x_1$ et x .

Question 1.3

Montrer que g est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1 si et seulement si c'est une fonction affine.

Maths appliquées 2/6

Question 1.4

Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$. On pose $x_0 = 0, x_1 = 1, g(0) = (1, 1), g(1) = (3, 4)$ et on suppose encore que l'application g est affine. Représenter, dans \mathbb{R}^2 , $g(0), g(1), g(\frac{1}{2}), g(\frac{2}{3}), g(\frac{-1}{3})$, l'ensemble $\{g(x), x \in \mathbb{R}\}$.

2 Fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et fonctions bi-affines symétriques.

Définition 2 On définit \mathcal{A}_2 comme l'ensemble des applications f de \mathbb{R}^2 dans E qui sont **bi-affines**, c'est-à-dire telles que l'application partielle $f(u, \cdot)$ soit, pour tout u fixé, une fonction affine, et que l'application partielle $f(\cdot, v)$ soit, pour tout v fixé, une fonction affine.

Question 2.1

Montrer que \mathcal{A}_2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R}^2 dans E .

Question 2.2

Montrer que :

$$f \in \mathcal{A}_2 \iff \exists(a, b, c, d) \in E^4, \forall(u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u, v) = uva + ub + vc + d.$$

Dans la fin de cette deuxième partie, on supposera que l'espace vectoriel E est de dimension finie d et on notera $\{e_1, \dots, e_d\}$ une base de E .

Question 2.3

Pour tout j variant de 1 à d , on définit les quatre applications :

$$\begin{array}{ll} w_j^1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E & w_j^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E \\ (u, v) \longmapsto e_j & (u, v) \longmapsto ue_j \\ w_j^3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E & w_j^4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E \\ (u, v) \longmapsto ve_j & (u, v) \longmapsto uve_j \end{array}$$

Montrer que la famille $\{w_j^i, j = 1, \dots, d, i = 1, \dots, 4\}$ est une base de \mathcal{A}_2 . En déduire la dimension de \mathcal{A}_2 .

Définition 3 On définit maintenant \mathcal{AS}_2 comme le sous-ensemble de \mathcal{A}_2 des fonctions bi-affines **symétriques**, c'est-à-dire telles que : $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u, v) = f(v, u)$.

Question 2.4

Montrer que \mathcal{AS}_2 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A}_2 . En donner une base et la dimension.

Question 2.5

Soit l l'application définie par :

$$\begin{array}{ll} l : \mathcal{AS}_2 \longrightarrow E_2[x] & \\ f \longmapsto h : \mathbb{R} \longrightarrow E & \\ & x \longmapsto f(x, x) \end{array}$$

Montrer que l est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On notera $flor_2$ l'application réciproque de l , qui à un élément F de $E_2[x]$ associe l'unique élément f de \mathcal{AS}_2 tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = F(x)$ et on appellera f la **floraison** d'ordre 2 de F .

Soit $F \in E_2[x]$ et f sa floraison d'ordre 2.

Question 2.6

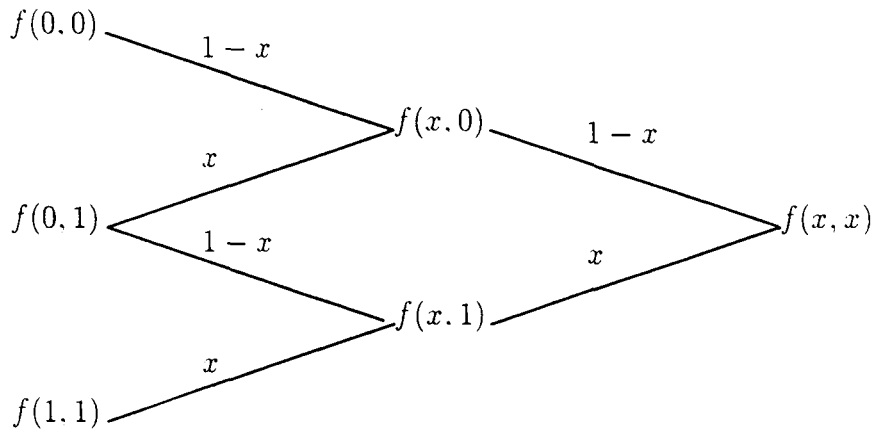
Déduire de la question 1.2 :

- $f(u, 0)$ en fonction de $f(0, 0)$ et de $f(1, 0)$.
- $f(u, 1)$ en fonction de $f(0, 1)$ et de $f(1, 1)$.
- $f(u, v)$ en fonction de $f(u, 0)$ et de $f(u, 1)$.

Donner l'expression de $F(x)$ en fonction de $x, f(0, 0), f(0, 1), f(1, 1)$.

Question 2.7

Expliquer comment le tableau triangulaire suivant schématise un algorithme de calcul de $F(x)$ à partir de $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(1,1)$.

**Question 2.8**

On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $a_0 = (0, 1)$, $a_1 = (4, 4)$, $a_2 = (1, -5)$. Soit F la fonction polynômiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par $F(x) = x^2 a_2 + x a_1 + a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dessiner l'ensemble des points $F(x)$, lorsque x décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Calculer f , puis les points $P_0 = f(0,0)$, $P_1 = f(1,0)$, $P_2 = f(1,1)$ et les placer sur le dessin précédent. Retrouver graphiquement le point $F(2/3)$ à l'aide de ces points.

Dans la suite, on supposera que $E = \mathbb{R}$.

3 Fonctions polynomiales de degré quelconque n et fonctions multi-affines symétriques.

Définition 4 On définit \mathcal{AS}_n comme étant l'ensemble des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui sont :

- multi-affines, i.e. telles que toutes les applications partielles sont des fonctions affines :
- symétriques, i.e. telles que: $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = f(u_1, \dots, u_n)$, $\forall \sigma \in S_n$.

Soit $f \in \mathcal{AS}_n$. Pour $\nu \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, n - \nu\}$, on utilisera la notation $f(0^{n-\nu-j} 1^j x^\nu)$ pour désigner l'image par f d'un n -uplet (u_1, \dots, u_n) dans lequel apparaît $n - \nu - j$ fois l'élément 0, j fois l'élément 1, ν fois l'élément x (quel que soit l'ordre dans lequel les éléments 0, 1, x apparaissent dans le n -uplet). Ainsi, avec $n = 6$, $j = 2$, $\nu = 3$, $f(1, 0, x, x, 1, x)$ s'écrit $f(0^1 1^2 x^3)$; de même $f(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ s'écrit $f(0^4 1^2 x^0)$.

Question 3.1

Montrer que \mathcal{AS}_n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Pour k variant de 1 à n , on définit l'application ε_k de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} par :

$$\varepsilon_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{X \subset \{1, \dots, n\} \\ |X| = k}} \prod_{i \in X} u_i;$$

et on pose $\varepsilon_0(u_1, \dots, u_n) = 1$.

Maths appliquées 4/6

Question 3.2

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\varepsilon_k(x, \dots, x)$.
- b) Montrer que la famille $(\varepsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de \mathcal{AS}_n . Quelle est la dimension de \mathcal{AS}_n ?

Dans la suite, on notera \mathcal{E} cette base de \mathcal{AS}_n .

Question 3.3

Soit l l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{lcl} l : \mathcal{AS}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ f & \longmapsto & h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto f(x, \dots, x) \end{array}$$

Ecrire sa matrice dans la base \mathcal{E} de \mathcal{AS}_n et la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. En déduire que l est bijective.

On notera $flor_n$ l'application réciproque de l , qui à un polynôme F de $\mathbb{R}_n[x]$ associe l'unique élément f de \mathcal{AS}_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, \dots, x) = F(x)$ et on appellera f la **floraison** d'ordre n de F .

Question 3.4

Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$ et f sa floraison d'ordre n .

Pour $\nu \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, n - \nu\}$, on pose $P_j^\nu(x) = f(0^{n-\nu-j} 1^j x^\nu)$.

Montrer que les points $P_j^\nu(x)$ vérifient la relation de récurrence $P_j^\nu(x) = (1-x)P_{j-1}^{\nu-1}(x) + xP_{j+1}^{\nu-1}(x)$.

Schématiser l'algorithme de calcul de $F(x)$ à partir des points $P_j = P_j^0(x), j = 0, \dots, n$, par un tableau triangulaire à n niveaux (généralisant celui de la question 2.7).

Dans la suite, on appellera un tel tableau "tableau de de Casteljau"¹ et les points P_j les "points de Bézier" de F .

Question 3.5

Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$. On suppose que les déclarations suivantes ont été effectuées :

CONST

$n = 50$; (* par exemple *)

TYPE

TAB = ARRAY[0..n, 0..n] OF REAL;

VECT = ARRAY[0..n] OF REAL;

Ecrire l'algorithme de de Casteljau permettant de calculer $F(x)$ à partir des points de Bézier de F . On en donnera les deux versions suivantes :

- a) Ecrire le corps de la procédure suivante :

PROCEDURE Simple(VAR PT : TAB; x : REAL);

(* A l'entrée de la procédure, le **tableau** PT contient dans sa première colonne les points de Bézier de F . Cette procédure doit remplir une partie du tableau PT de sorte que $PT[j, \nu] = P_j^\nu(x)$, pour $0 \leq j \leq n - \nu$. *)

Préciser l'élément du tableau PT dans lequel se trouve la valeur de $F(x)$ à la fin de la procédure.

- b) On cherche à minimiser la place mémoire occupée : pour cela, on ne stocke plus les points intermédiaires. Ecrire le corps de la fonction suivante :

FUNCTION Améliorée(PV : VECT; x : REAL) : REAL;

(* A l'entrée de la fonction, le **vecteur** PV contient les points de Bézier de F . Cette fonction doit retourner la valeur de $F(x)$, en utilisant le moins de place mémoire possible. *)

1. du nom de l'ingénieur qui l'a introduit, ainsi que l'algorithme qui en découle. Paul de Faget de Casteljau

4 Polynômes de Bernstein.

Dans cette partie, on va définir les polynômes de Bernstein et démontrer certaines de leurs propriétés, grâce au concept de floraison et à l'algorithme de de Casteljau, sans utiliser l'expression analytique de ces polynômes.

Question 4.1

- a) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. On considère :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R}_n[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto P_i = f(0^{n-i} 1^i x^0) \text{ où } f = \text{flor}_n(F) \end{aligned}$$

Montrer que φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

- b) On définit :

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{R}_n[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ F &\longmapsto (\varphi_0(F), \dots, \varphi_n(F)) \end{aligned}$$

Montrer, en utilisant la question 3.4, que l'application \circ est injective. En déduire que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $\{e_i, i = 0, \dots, n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on désignera par B_i^n l'image réciproque par l'application \circ du vecteur e_i .

On pourra noter b_i^n la floraison d'ordre n du polynôme B_i^n .

Question 4.2

Que peut-on dire de la famille $\{B_i^n, i = 0, \dots, n\}$?

Quels sont les points de Bézier de B_i^n ?

Par quel terme désigne-t-on la famille $\{\varphi_i, i = 0, \dots, n\}$ par rapport à la famille $\{B_i^n, i = 0, \dots, n\}$?

Question 4.3

Montrer que : $\forall F \in \mathbb{R}_n[x], F = \sum_{i=0}^n \varphi_i(F) B_i^n$.

En déduire : $\sum_{i=0}^n B_i^n = 1$.

Question 4.4

Montrer, grâce au tableau de de Casteljau permettant de calculer $B_i^n(x)$, que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq B_i^n(x) \leq 1.$$

Question 4.5

Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$, f sa floraison d'ordre n . P_j les points de Bézier de F et les points $P_j^y(x)$ définis comme dans la question 3.4.

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On définit l'application \tilde{f} de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} par : $\tilde{f}(u_1, \dots, u_{n-1}) = f(u_1, \dots, u_{n-1}, a)$.

Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{AS}_{n-1}$. On pose $\tilde{F} = \text{flor}_{n-1}^{-1}(\tilde{f})$. Comparer $\tilde{F}(a)$ et $F(a)$.

Démontrer l'égalité : $\tilde{F}(a) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1(a) B_i^{n-1}(a)$.

En utilisant la relation de récurrence établie à la question 3.4 et en prenant la convention $B_{-1}^{n-1}(x) = 0$ et $B_n^{n-1}(x) = 0$, démontrer la relation :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_i^n(x) = (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x).$$

Question 4.6

Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$ et f sa floraison d'ordre n .

En écrivant $F(x) = f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$, avec $u_j(x) = x, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, et en appliquant la formule de dérivation d'une application composée, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall h \neq 0, \quad F'(x) = n \frac{f(x, \dots, x, u+h) - f(x, \dots, x, u)}{h}$$

En déduire $(B_i^n)'(0)$ et $(B_i^n)'(1)$.

Question 4.7

Montrer que : $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_i^n(x) = C_n^i (1-x)^{n-i} x^i$.

Fin de l'énoncé.