Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2024

Préambule

1. La fonction tangente est dérivable sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}.$$

2. (a) La fonction tangente ne s'annule pas sur $]0, \pi[\setminus\{\pi/2\}$ donc g est continue sur $]0, \pi[\setminus\{\pi/2\}$ comme inverse de fonction continue ne s'annulant pas. De plus

$$\tan(x) \underset{x\to(\pi/2)^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{x\to(\pi/2)^+}{\longrightarrow} -\infty$$

donc, par inverse, g tend vers 0 en $\pi/2$.

$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ se prolonge sur }]0, \pi[\text{ en une fonction continue continue } \widetilde{g} \text{ par } \widetilde{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.}$

La fonction $\widetilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[\setminus\{\pi/2\}$ comme inverse de fonction dérivable ne s'annulant pas et, pour tout $x \in]0, \pi[\setminus\{\pi/2\}$:

$$\widetilde{g}'(x) = g'(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

Comme inverse, $\widetilde{g}'$ tend vers -1 en $\pi/2$ donc, par le théorème de limite de la dérivée, $\widetilde{g}'$ est dérivable en $\pi/2$ et $\widetilde{g}'(\pi/2) = -1$. $\boxed{\text{Finalement, la fonction } \widetilde{g} \text{ est dérivable sur }]0, \pi[\text{ et sa dérivée est } -1/\sin^2.}$

(b) Par la question précédente, $\widetilde{g}'$ étant dérivable sur $]0, \pi[$, de dérivée $-1/\sin^2$ (qui est continue sur cet intervalle), $\boxed{\text{une primitive de } 1/\sin^2 \text{ est } -\widetilde{g}' \text{ sur }]0, \pi[}$.

3. (a) La fonction f_1 est définie en un réel x si et seulement si $\frac{x}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ce qui est équivalent au fait que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

La fonction f_2 est définie en un réel x si et seulement si $f_1(x) > 0$ ce qui donne :

$$\boxed{\mathcal{D}_{f_2} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[}.$$

(b) Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_{f_1}$, $x - 2\pi \in \mathcal{D}_{f_1}$ et

$$f(x + 2\pi) = \tan\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = f_1(x)$$

par π-périodicité de la fonction tangente. On peut procéder de même pour f_2.

$\boxed{\text{Finalement, } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques.}}$

(c) Par composition, f_1 est dérivable sur son domaine de définition. De même, f_2 est dérivable sur son domaine de définition puisque la fonction logarithme l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{En conclusion, les fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.}}$

(d) Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$,

$$\boxed{f_1'(x) = \frac{1}{2}\tan'(x/2) = \frac{1}{2\cos^2(x/2)}}.$$

(e) Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$,

$$\boxed{f_2'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{1/\big(2\cos^2(x/2)\big)}{\tan(x/2)} = \frac{1}{\cos^2(x/2)\tan(x/2)} = \frac{1}{2\cos(x/2)\sin(x/2)}}.$$

Finalement, $\boxed{\text{sur } \mathcal{D}_{f_2},\ f_2' = \frac{1}{\sin}}$.

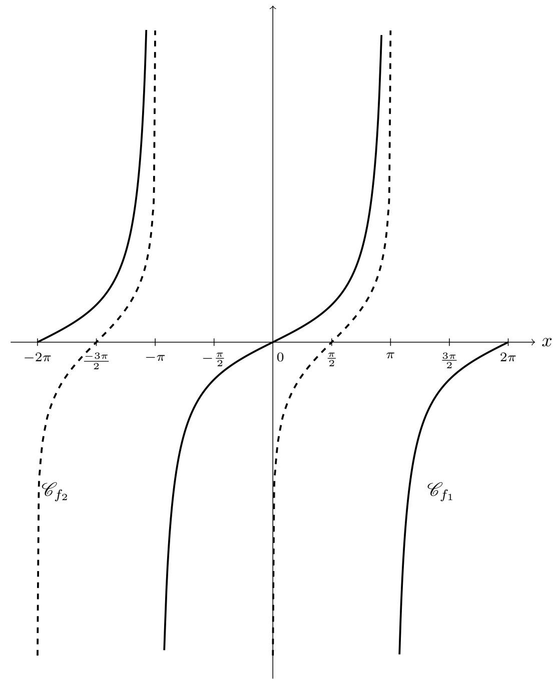
(f) Sur $]-\pi, \pi[$, f_1 est strictement positive et les limites de f_1 sont données directement par les limites de la fonction tangente ce qui donne le tableau :

x	$-\pi$		$\pi/2$		π
f_1'	‖		$+$		‖
f_1	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Avec le domaine de f_2 et les limites de la fonction logarithme, on obtient le tableau :

x	0		$\pi/2$		π		2π
f_2'	‖		$+$		‖		
f_2	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖		

(g) On a les graphes suivants :



4. (a) La fonction f_3 est définie en un réel x si et seulement si $x \not\equiv \pi/2\ [\pi]$ ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

En tant qu'inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}_{f_3}$, $\boxed{f_3 \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_{f_3}}$.

(b) Pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $f_3'(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \geqslant 0$ et cette quantité est nulle uniquement pour $x = 0$. Ceci donne le tableau :

x	0		$\pi/4$
f_3'	0	$+$	
f_3	1	$\nearrow$	2

Partie I

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto t$ et ln sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, x]$ donc, par intégration par parties :

$$\int_1^x 1 \times \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Finalement, $\boxed{x \mapsto x\ln(x) - x \text{ est une primitive de ln sur } \mathbb{R}_+^*}$.

(b) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon) - 1}.$$

(c) Par croissance comparée et somme

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

donc $\boxed{\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -1}$.

2. La fonction f_2 est continue sur $]0, \pi/2]$ donc on étudie la convergence de l'intégrale au voisinage de 0. De plus, cette fonction est de signe constant au voisinage de 0 à droite et :

$$\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \underset{x\to 0^+}{o}(\ln(x))$$

ce qui donne $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$. Or, ln est intégrable au voisinage de 0 à droite (elle y est de signe constant) donc, par le théorème sur les équivalents pour les intégrales généralisées, f_2 est intégrable au voisinage de 0 à droite.

$\boxed{\text{En conclusion } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$

3. La fonction Arctan est développable en série entière sur $]-1, 1[$ (le rayon de convergence de cette série entière vaut 1) et, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}.$$

4. On va utiliser la théorème d'intégration terme à terme.
Soit $S\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ intégrables telles que :

$$\forall x \in I,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Si la série $\sum \int_I |f_n(x)|\mathrm{d}x$ est convergente, alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I S(x)\mathrm{d}x = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x.$$

On va appliquer ce théorème avec $I =]0, 1[$, $S : x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ et $f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ où n est un entier naturel. En divisant par x l'égalité de la question précédente, on a l'expression de S :

$$\forall x \in I,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

On a, en calculant l'intégrale de $|f_n|$ sur I,

$$\sum \int_I |f_n(x)|\mathrm{d}x = \sum \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Cette série est à terme positifs et son terme général est majoré par $\frac{1}{4n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann multipliée par 1/4). Ainsi, par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la dernière hypothèse du théorème d'intégration terme à terme est réalisée ce qui donne l'intégrabilité de S sur I et l'égalité :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_I S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}.$$

5. (a) Avec les résultats du Préambule, la fonction f_1 réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]0, \pi/2]$ vers $]0, 1]$. Ainsi, compte-tenu de la dérivée de f_1 calculée (en posant $u = \tan(x/2)$, $\mathrm{d}u = \frac{1+u^2}{2}\mathrm{d}x$), par le théorème de changement de variables pour les intégrales généralisée, les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln(u)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes avec la question 2. De plus, celles-ci sont égales. On effectue une intégration par parties dans cette dernière intégrale. Les fonction $a = \ln$ et $b = 2\,\mathrm{Arctan}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1]$ et

$$a(x)b(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 2x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

donc, par le théorème d'intégration par parties généralisé (les convergences sont justifiées dans cette question et dans 2), on a l'égalité :

$$\int_0^1 \ln(u)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{Arctan}(1)\ln(1) - 0 - \int_0^1 \frac{1}{u}2\,\mathrm{Arctan}(u)\mathrm{d}u = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

ce qui s'écrit finalement

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = -2\mathcal{C}}.$$

(b) La somme de la série définissant $\mathcal{C}$ est une série alternée (convergente). En posant, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

on a : $S_{2N+1} \leqslant \mathcal{C} \leqslant S_{2N}$ et $|S_N - \mathcal{C}| = |R_N| \leqslant \frac{1}{(2N+3)^2}$. En particulier, pour $N = 1$, $S_N = S_1 = 8/9$ ce qui s'écrit, avec l'inégalité précédente :

$$\left|\frac{8}{9} - \mathcal{C}\right| \leqslant \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

$\boxed{\text{La valeur 8/9 est donc une valeur approchée de } \mathcal{C} \text{ à 1/25 près.}}$

(c) Soit p un entier naturel strictement supérieur à 2. Avec les inégalités précédentes, une condition suffisante sur $N \in \mathbb{N}$ pour que S_N soit une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près est

$$\frac{1}{(2N+3)^2} \leqslant 10^{-2p} \Longleftrightarrow 10^p \leqslant 2N+3 \Longleftrightarrow \frac{10^p - 3}{2} \leqslant N.$$

$\boxed{\text{Finalement, à partir de } N = \left\lfloor \frac{10^p - 3}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{10^p}{2} - 1,\ S_N \text{ est une valeur approchée de } \mathcal{C} \text{ à } 10^{-2p} \text{ près.}}$

Partie II

1. La fonction f_4 est le produit de sin par f_2 donc elle est dérivable sur $]0, \pi[$ et, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$f_4'(x) = \sin'(x)f_2(x) + \sin(x)f_2'(x) = \cos(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \cos(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1.$$

À nouveau par produit, f_4' est dérivable sur $]0,\pi[$ et, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$f_4''(x) = -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.}$$

2. L'équation $y''+y=0$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants homogène. Les racines de l'équation caractéristique sont i et $-$i donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de cette équation est } \mathrm{Vect}(\sin,\cos)}$.
3. La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $y''+y = f_4''+f_4$ ce qui s'écrit

$$(y-f_4)'' + (y-f_4) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe une solution y_0 de l'équation homogène associée tel que $y - f_4 = y_0$ ce qui s'écrit

$$\boxed{y = y_0 + f_4}.$$

4. (a) Supposons que y est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$. On a, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\begin{cases} y'(x) = z'(x)\sin(x) + z(x)\cos(x) \\ y''(x) = z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) + z(x)\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

ce qui s'écrit, en prenant $\psi = z'$:

$$\psi'(x)\sin(x) + 2\psi(x)\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

puis, comme sin ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, on en déduit que z' est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\boxed{\psi' + 2\frac{\cos}{\sin}\psi = \frac{\cos}{\sin^2} \qquad (\mathcal{E}')}.$$

(b) Une primitive de $2\frac{\cos}{\sin}$ sur $]0,\pi[$ est $x \mapsto 2\ln|\sin(x)|$ donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$ sont de la forme $x \mapsto C\exp(-2\ln|\sin(x)|)$ ce qui s'écrit :

$$x \mapsto \frac{C}{\sin(x)^2}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme : $\psi : x \mapsto \frac{C(x)}{\sin(x)^2}$ où C est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$. La fonction ψ est solution de $(\mathcal{E}')$ sur $]0,\pi[$ si et seulement si

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad \frac{C'(x)}{\sin(x)^2} - 2\frac{C'(x)\cos(x)}{\sin(x)^3} + 2\frac{C'(x)\cos(x)}{\sin(x)^3} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

ce qui donne $C' = \cos$. Ainsi, on peut choisir $\psi = \frac{\sin}{\sin^2}$ c'est-à-dire

$$\psi : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}')$ sur $]0,\pi[$ est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin(x)}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

qui est l'expression de z'.

(c) Avec les primitives trouvées dans le Préambule à la question 3e, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, une primitive de

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin(x)}$$

sur $]0,\pi[$ est $x \mapsto \lambda\widetilde{g}(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Ainsi, z est de la forme :

$$\boxed{z : x \mapsto \mu + \lambda\widetilde{g}(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

(d) Finalement, si y est solution de $(\mathcal{E})$, en multipliant l'expression de z précédente par sin, on trouve que y est de la forme :

$$z : x \mapsto \mu\sin(x) + \lambda\cos(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

avec l'expression de $\widetilde{g}$ qui est le prolongement de g en $\pi/2$. Réciproquement, les fonctions de cette forme sont bien des solutions de $(\mathcal{E})$. $\boxed{\text{On retrouve les résultats de la question 3.}}$

Partie III

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a $\cos\theta \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\cos^2\theta \geqslant \frac{1}{2}$, donc $\cos^2\theta \neq 0$.

   La fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ est donc définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, et continue comme quotient et composée de fonctions continues. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta$ est donc correctement définie. $\boxed{\text{On a donc } \mathcal{D}_G = \mathbb{R}.}$
2. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité pour les intégrales à paramètre.

   Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}\times\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}. \end{cases}$
   - Pour tout $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition ;
   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par composition ;
   - pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a : $-\frac{x^2}{\cos^2\theta} < 0$ donc $|f(x,t)| \leqslant 1$, or $t \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

   $\boxed{\text{Finalement, } G \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
3. Soit $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. On a :

$$\begin{array}{ll} & 0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1 \\ \text{donc} & \cos^2\theta \leqslant 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\cos^2(\theta)} \geqslant 1 \\ \text{donc} & -\dfrac{x^2}{\cos^2\theta} \leqslant -x^2 \\ \text{donc} & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \\ \text{donc} & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2}\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \end{array}$$

   ce qui donne finalement $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.
4. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivabilité. On considère à nouveau $f : \begin{cases} \mathbb{R}\times\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}. \end{cases}$

   Soit $a \in \mathbb{R}$.
   - Pour tout $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition ;
   - pour tout $x \in [-a,a]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par composition ;
   - pour tout $(x,t) \in [-a,a]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{\cos^2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$$

   donc $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par composition ;

— pour tout $(x,t) \in [-a,a] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$\begin{aligned} & \cos\theta \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{donc} \quad & \cos^2\theta \geqslant \frac{1}{2} \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{\cos^2\theta} \leqslant 2 \\ \text{donc} \quad & \left|\frac{2x}{\cos^2\theta}\right| \leqslant 4a \end{aligned}$$

Or on a vu précédemment que $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \leqslant 1$, donc par produit membre à membre (tous les membres étant positifs), on a :

$$\left|\frac{2x}{\cos^2\theta}\right| \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \leqslant 4a.$$

et donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 4a$.

Or $t \mapsto 4a$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Finalement, $\boxed{G \text{ est dérivable sur } [-a,a]}$. Comme cela est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a bien montré que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta}.$$

5. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{H \text{ est définie sur } \mathcal{D}_H = \mathbb{R}}$.
   (b) La fonction H est **la** primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0.
   Ainsi, $\boxed{H \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ H'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}}$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\mathrm{d}\theta = 0$, et par ailleurs $H(0) = 0$, donc on a bien $G'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}H(x)$.
   Si $x \neq 0$, posons $u = x\tan\theta$. Le changement de variable est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}u = \frac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$, donc :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2\mathrm{e}^{-x^2(1+\tan^2\theta)}\frac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2\mathrm{e}^{-x^2-(x\tan\theta)^2}\frac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{x\tan\frac{\pi}{4}} -2\mathrm{e}^{-x^2-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{x} -2\mathrm{e}^{-x^2-u^2}\mathrm{d}u \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}H(x). \end{aligned}$$

   Dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}H(x)}$.
7. La fonction $H^2 + G$ est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(H^2+G)'(x) = 2H(x)H'(x) + G'(x) = 2H(x)\cdot 2\mathrm{e}^{-x^2} - 2\mathrm{e}^{-x^2}H(x) = 0.$$

   Ainsi, $H^2 + G$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   De plus, $G(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(0)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$, et $H(0) = 0$, donc $(H^2+G)(0) = \frac{\pi}{4}$ ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(H^2+G)(x) = \frac{\pi}{4}}.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 3 :

$$(H(x))^2 = \frac{\pi}{4} - G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} - 0.$$

   De plus, $H(x) \geqslant 0$, donc $H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On a obtenu $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$.
   Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable, de classe $\mathscr{C}^1$, $u = \sqrt{x}t$, ce qui donne $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\mathrm{d}t$, on obtient pour tout réel $a > 0$:

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{x}a} \mathrm{e}^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}u \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

   donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$.

Partie IV

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}.$$

   Le rayon de convergence est $+\infty$, le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a alors pour tout entier $N \geqslant 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\sin x.$$

   De plus, si $x = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$ existe et vaut 1 c'est-à-dire $\varphi(0)$.
   On conclut que φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}.$$

3. Remarquons d'abord que

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{X^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{X^2}{(N\pi)^2}\right).$$

   Lorsqu'on développe cette expression, on obtient 2^N termes, et chaque terme de la forme développée correspond au choix d'un terme dans chaque parenthèse. Pour obtenir un terme de degré 2, il faut choisir une seule fois le terme de la forme $-\frac{X^2}{(n\pi)^2}$, et toutes les autres fois 1. Le terme de degré 2 est donc $\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{X^2}{(n\pi)^2}\right)$ d'où :

$$\boxed{\alpha_N = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n\pi)^2}}.$$

4. Dans le développement en série entière de φ, le coefficient de x^2 est $\alpha = \frac{-1}{(2+1)!} = -\frac{1}{6}$.
   En admettant que $\lim\limits_{N\to+\infty} \alpha_N = \alpha$, on a pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = -\pi^2\alpha_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\pi^2\alpha = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\text{On a donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

5. Toutes les séries qui apparaissent dans cette question et la suivante ont un terme général qui est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc sont bien convergentes. On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}}$.

Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} \\
&= -\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

ce qui donne finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$.

6. On calcule :

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{D} - \mathcal{C} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&= 2\sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{(2n+1)^2} - \left(\sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \\
&= \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

ce qui s'écrit : $\boxed{2\mathcal{D} - \mathcal{C} = \frac{\pi^2}{8}}$.

7. On déduit de la question précédente que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \mathcal{C}\right) \\
&\approx \frac{1}{2}(1,23 + \frac{8}{9}) \\
&\approx \frac{1}{2}(1,23 + 0,89) \\
&\approx \frac{1}{2} \times 2,12 \\
&\approx 1,06.
\end{aligned}
$$

Majorons l'erreur commise. On a $\frac{\pi^2}{8} \approx 1,23$ avec une erreur majorée par $\frac{1}{100}$ (on va voir qu'il serait inutile de garder plus de chiffres significatifs). De plus, $\mathcal{C} \approx \frac{8}{9}$ avec une erreur majorée par $\frac{1}{25}$, donc $\mathcal{C} \approx 0,89$ avec une erreur majorée par $\frac{1}{25} + \frac{1}{100}$. Finalement, l'erreur est majorée par :

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} \leqslant \frac{1}{25}.
$$

On a donc $\boxed{|\mathcal{D} - 1,06| \leqslant 0,04}$.