

Centrale PSI — 2001 — math. 1

PARTIE I

Question I.1

I .1.a. On a $(C_0 | C_0) = 1$ et $(C_0 | C_n) = \int_0^1 \sqrt{2} \cos n\pi x \, dx = 0$ si $n \geq 1$.

Enfin, si $n \geq 1$ et $p \geq 1$, avec $n \neq p$, $(C_n | C_n) = 2 \int_0^1 \cos^2 n\pi x \, dx = \int_0^1 (1 + \cos 2n\pi x) \, dx = 1$ et $(C_n | C_p) = 2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos p\pi x \, dx = \int_0^1 (\cos(n+p)\pi x + \cos(n-p)\pi x) \, dx = 0$. La suite C est bien orthonormale.

I .1.b. De même, si $n \neq p$, $(S_n | S_n) = 2 \int_0^1 \sin^2(n+1)\pi x \, dx = \int_0^1 (1 - \cos 2(n+1)\pi x) \, dx = 1$ et $(S_n | S_p) = \int_0^1 (\cos(n-p)\pi x - \cos(n+p+2)\pi x) \, dx = 0$, et la suite S est également orthonormale.

Question I.2

I .2.a. Notons $p = \Pi_{\Phi}^n(f)$. On dispose naturellement de $f = p + f - p$ et $(f - p) \perp p$ donc $\|f\|^2 = \|p\|^2 + \|f - p\|^2$ d'après Pythagore.

Montrons que $\|f - p\| = d_{\Phi}^n(f)$.

Comme $p \in V_{\Phi}^n$, on a $\|f - p\| \geq d_{\Phi}^n(f) = \inf_{q \in V_{\Phi}^n} \|f - q\|$.

Mais si $q \in V_{\Phi}^n$, on peut écrire $f - q = f - p + p - q$ et $f - p$ étant orthogonal à V_{Φ}^n , on a $f - p \perp p - q$ d'où, toujours d'après Pythagore, $\|f - q\|^2 = \|f - p\|^2 + \|p - q\|^2 > \|f - p\|^2$ si $p \neq q$. Ainsi p est-il l'unique point de V_{Φ}^n qui réalise le minimum de la distance de f à V_{Φ}^n .

I .2.b. D'après ce qui précède, pour $\|f\| = 1$, $\|\Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f\| = 1$. Mais prenant par exemple $f = \Phi_0$ on obtient $\|\Pi_{\Phi}^n(\Phi_0)\| = \|\Phi_0\| = 1$ donc la borne supérieure cherchée vaut 1.

I .2.c. On a : $\Pi_{\Phi}^n(f) = \sum_{k=0}^n (\Phi_k | f) \Phi_k$ (c'est un résultat du cours).

Le a. indique que pour tout entier n on a $\left\| \sum_{k=0}^n (\Phi_k | f) \Phi_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n (\Phi_k | f)^2 \leq \|f\|^2$. La série à termes réels positifs $(\sum_{k=0}^{\infty} (\Phi_k | f)^2)$ est donc bien convergente de somme plus petite que $\|f\|^2$. C'est l'inégalité de Bessel.

Question I.3

I .3.a. Fixons k . Comme $f_k \in V_{\Phi}$, il existe $N = \min\{n \in \mathbb{N}, f_k \in V_{\Phi}^n\}$. Alors, pour $n \geq N$, $f_k \in V_{\Phi}^n$ donc $\Pi_{\Phi}^n(f_k - f) = f_k - \Pi_{\Phi}^n(f)$ et le résultat souhaité est immédiat.

On en déduit, pour $n \geq N$: $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f - f_k\| + \|\Pi_{\Phi}^n(f_k - f)\| \leq 2\|f - f_k\|$, puisque pour toute fonction $g \in E$ on a vu que $\|\Pi_{\Phi}^n(g)\| \leq \|g\|$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, et k choisi de sorte que $\|f - f_k\| \leq \varepsilon/2$, et enfin N choisi de sorte que $f_k \in V_{\Phi}^N$. Alors on aura : $\forall n \geq N, \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire qu'on a bien : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| = 0$.

I .3.b. L'implication (i) \Rightarrow (ii) découle immédiatement de ce qui précède.

Inversement, (ii) signifie que la suite de terme général $f_k = \Pi_{\Phi}^k(f)$ converge vers f .

I .3.c. On a écrit $\|f\|^2 = \|\Pi_{\varphi}^n(f)\|^2 + \|f - \Pi_{\varphi}^n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^n (f | \varphi_k)^2 + \|f - \Pi_{\varphi}^n(f)\|^2$. Passant à la limite quand

$n \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (f | \Phi_k)^2$.

Utilisant l'égalité du 2.a, nous obtenons alors : $d_{\Phi}^n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f | \Phi_k)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (f | \Phi_k)^2$.

Question I.4

I .4.a. \tilde{f} est définie sur $[-1, 1]$ par $\tilde{f}(x) = f(|x|)$. Ainsi $\tilde{f}(-1) = \tilde{f}(1) = f(1)$, et donc on a bien défini une fonction 2-périodique continue sur \mathbb{R} par recollement de la période $[-1, 1]$.

I .4.b. La fonction h considérée est paire, 2π -périodique et continue sur \mathbb{R} . Le théorème de Parseval assure donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (h - S_n(h))^2 = 0$, où $S_n(h)$ est la n -ième somme de Fourier de h .

Or, pour tout x , $S_n(h)(x) = a_0(h)/2 + \sum_{k=1}^n a_k(h) \cos kx$, avec $a_0(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2(f | C_0)$

et, pour $k \geq 1$, $a_k(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \cos kx dx = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) C_k(t) dt = \sqrt{2}(f | C_k)$.

Donc on peut écrire, pour $t \in [0, 1]$: $S_n(h)(\pi t) = (f | C_0)C_0(t) + \sum_{k=1}^n (f | C_k)C_k(t) = \Pi_C^n(t)$.

Alors $\int_{-\pi}^{\pi} (h - S_n(h))^2 = 2 \int_0^{\pi} (h - S_n(h))^2(x) dx = 2\pi \int_0^1 (f(t) - \Pi_C^n(t))^2 dt = 2\pi \|f - \Pi_C^n\|^2$ tend bien vers zéro, et la suite C est totale dans E .

I .4.c. On a, pour tout $n \geq 0$, $(C_{2n} | C_1) = 0$, donc $1 = \|C_1\|^2 \neq \sum_{n=0}^{+\infty} (C_1 | C_{2n})^2 = 0$: c'est dire que la suite (C_{2n}) qui est bien sûr orthonormale, n'est pas totale.

PARTIE II

Question II.1

II .1.a. Toute fonction lipschitzienne est continue (et même uniformément) sur I .

Si f_1 (resp. f_2) est lipschitzienne de rapport C_1 (resp. C_2), alors $f_1 + f_2$ est lipschitzienne de rapport $C_1 + C_2$ (au plus) et, pour tout réel λ , λf_1 est lipschitzienne de rapport $|\lambda|C_1$: $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$, qui n'est évidemment pas vide, est donc un sous-espace de $C^0(I, \mathbb{R})$.

$x \mapsto x$ est évidemment 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} , mais $x \mapsto x^2$ ne l'est pas, car, pour $x = n \in \mathbb{N}^*$ et $y = 0$, on a : $\left| \frac{n^2 - 0}{n - 0} \right| = n$ non borné. Il n'y a pas stabilité pour le produit.

L'existence de $k(f)$ découle directement du théorème de la borne supérieure : toute partie majorée non vide de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

II .1.b. Supposant l'intervalle I compact, deux applications lipschitziennes f_1 (resp. f_2) de rapport C_1 (resp. C_2) sont bornées sur I puisque continues : soit $M_1 = \sup_{x \in I} |f_1(x)|$ (M_2 est définie de même). Alors

$f_1 \times f_2$ est clairement lipschitzienne de rapport $M_1 C_2 + M_2 C_1$ puisqu'on peut écrire, pour $(x, y) \in I^2$: $f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y) = (f_1(x) - f_1(y))f_2(x) + f_1(y)(f_2(x) - f_2(y))$. Ceci permet de conclure qu'on a bien affaire à une algèbre.

En revanche $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie, continue mais non lipschitzienne sur $[0, 1]$, puisque, faisant $1 \geq x > y = 0$,

$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui n'est pas borné sur $]0, 1]$.

Question II.2

Si f est lipschitzienne, f' est bornée, puisque, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq k(f)$.

Inversement, c'est le théorème des accroissements finis qui dit que f est lipschitzienne et que $k(f) \leq \sup_{x \in I} |f'(x)|$.

Finalement on a montré à la fois l'équivalence souhaitée et la formule $k(f) = \sup_{x \in I} |f'(x)|$.

Question II.3

Soit K un majorant de la suite $(k(f_n))$: ayant fixé deux réels x et y de I , on aura, pour tout entier n : $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$. On peut passer à la limite : f est lipschitzienne et $k(f) \leq K$.

Question II.4

II .4.a. Il suffit de choisir \hat{g} paire et 2-périodique. La vérification (facile) est laissée au lecteur. En particulier $k(\hat{g}) = k(g) \leq 1$.

II .4.b. Pour tout n fixé, la continuité de \hat{g} suffit à écrire que g_n est de classe C^1 avec :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = n(\hat{g}(x + 1/n) - \hat{g}(x)), \text{ et } |g'_n(x)| \leq n \times k(\hat{g}) \times (1/n) = k(\hat{g}) \leq 1.$$

Le changement de variable $u = n(t - x)$ fournit $g_n(x) = \int_0^1 \hat{g}(x + u/n) du$ et, comme \hat{g} est 1-lipschitzienne :

$|g_n(x) - \hat{g}(x)| \leq \int_0^1 |\hat{g}(x + u/n) - \hat{g}(x)| du \leq \int_0^1 (u/n) du = \frac{1}{2n}$. On en déduit aussitôt la convergence uniforme sur \mathbb{R} de (g_n) vers \hat{g} .

Question II.5

II .5.a. Si $n \geq 1$,

$$(f | C_n) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos n\pi t dt = \sqrt{2} \left[f(t) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 - \sqrt{2} \int_0^1 f'(t) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} dt = -\frac{1}{n\pi} (f' | S_{n-1}).$$

II .5.b. f' est continue, et la suite (S_{n-1}) est orthonormale, donc on a vu que $(\sum (f' | S_{n-1})^2)$ est convergente, de somme majorée par $\|f'\|^2$. On en déduit aussitôt que la série de terme général $n^2(f | C_n)^2$ est convergente, de somme majorée par $\frac{1}{\pi^2} \|f'\|^2$.

Question II.6

II .6.a. Remarque préliminaire : si φ et ψ sont continues sur $[0, 1]$ et si (φ_p) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers φ , alors $(\varphi | \psi)$ est la limite de la suite de terme général (φ_p, ψ) : en effet $|(\varphi - \varphi_p | \psi)| \leq \|\varphi - \varphi_p\|_\infty \|\psi\|_\infty$ (où $\|\psi\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\psi(x)|$) et on a supposé $\lim \|\varphi - \varphi_p\|_\infty = 0$.

Considérons donc maintenant f lipschitzienne et $g = f/k(f)$. g est 1-lipschitzienne, et donc limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions $(g_p)_{p \geq 1}$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ et de dérivées bornées par 1.

Ainsi a-t-on, pour tout $p \geq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(g_p | C_n)^2 \leq 1/\pi^2$.

Pour tout n fixé, on dispose de $\forall p \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2(g_p | C_k)^2 \leq 1/\pi^2$, donc, passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on

obtient, pour tout n : $\sum_{k=1}^n k^2(g | C_k)^2 \leq 1/\pi^2$. C'est dire que la série $(\sum_n n^2(g | C_n)^2)$ converge, de somme majorée par $1/\pi^2$.

Multipliant par $k(f)^2$, on en déduit la convergence et l'inégalité souhaitées : $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f | C_n)^2 \leq \frac{k(f)^2}{\pi^2}$.

II .6.b. Alors : $\left(nd_C^{n-1}(f) \right)^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} n^2(f | C_k)^2 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k^2(f | C_k)^2 \leq k(f)^2/\pi^2$, d'où $d_C^{n-1}(f) \leq \frac{k(f)}{n\pi}$.

PARTIE III

Question III.1

On écrit, pour $n \geq 1$ et $m \geq 0$ fixés :

$$\begin{aligned}
 n + \sum_{j=0}^m d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 &= n + \sum_{j=0}^m \left(\|\Psi_j\|^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (\Psi_j \mid \Phi_i)^2 \right) \\
 &= n + m + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (\Phi_i \mid \Psi_j)^2 \\
 &= n + m + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \|\Pi_{\Psi}^m(\Phi_i)\|^2 \\
 &\geq n + m + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \|\Phi_i\|^2 = n + m + 1 - n = m + 1.
 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, posant $m = 2n - 1 \geq 1$, on obtient l'inégalité demandée.

Question III.2

III .2.a. Chaque Ψ_j étant lipschitzienne, on peut lui appliquer les résultats de la partie précédente, et, pour tout $j \geq 0$, on a : $k(\Psi_j) \geq n\pi d_C^{n-1}(\Psi_j)$.

Appliquant la question III.1 au cas où $\Phi = C$, on obtient alors : $\sum_{j=0}^{2n-1} (\Psi_j)^2 \geq n^2 \pi^2 \sum_{j=0}^{2n-1} d_C^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n^3 \pi^2$.

III .2.b. Si la suite était bornée par A , on aurait écrit pour tout $n \geq 1$: $2nA^2 \geq \pi^2 n^3$, ce qui est évidemment absurde.

III .2.c. Si la suite ne tendait pas vers l'infini, on pourrait en extraire une suite bornée : $(k(\Psi_{\theta(n)}))$. Mais la suite de fonctions $(\Psi_{\theta(n)})$ est encore orthonormale et constituées de fonctions lipschitziennes : le III.2.a s'applique et on obtient bien une contradiction.

III .2.d. Grâce à II.2, on écrit $k(C_n) = \sup_{x \in [0,1]} |C'_n(x)| = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ n\pi\sqrt{2}, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

III .2.e. Supposant la suite $(k(\Psi_j))$ croissante, on peut écrire, pour $n \geq 1$: $\pi^2 n^3 \leq \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \leq 2n \cdot k(\Psi_{2n-1})^2$, d'où $k(\Psi_{2n-1}) \geq \pi n / \sqrt{2} \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n - 1)$. Alors on a aussi $k(\Psi_{2n}) \geq k(\Psi_{2n-1}) \geq \pi n / \sqrt{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n)$.

Finalement, la constante $\Gamma = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ convient.

PARTIE IV

Question IV.1

Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (Q_n \mid Q_m) &= \frac{\alpha_n}{2^n n!} \frac{\alpha_m}{2^m m!} \int_0^1 P_n(2x-1) P_m(2x-1) dx \\
 &= \frac{\alpha_n}{2^n n!} \frac{\alpha_m}{2^m m!} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \frac{\alpha_n^2}{2^{2n+1} n!^2} \frac{2^{2n+1} n!^2}{2n+1}, & \text{si } m = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La suite est donc orthonormale si et seulement si on choisit de poser $\alpha_n = \sqrt{2n+1}$ pour tout entier n .

Observons que U_n est un polynôme de degré $2n$, donc P_n et Q_n sont des polynômes de degré $2n - n = n$. C'est dire que $V_Q^n = \mathbb{R}_n[X]$, espace des polynômes de degré au plus égal à n .

Question IV.2

IV .2.a. On a déjà vu que, si $n \geq 0$,

$$d_Q^n(f)^2 - d_Q^{n+1}(f)^2 = \left(\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (f | Q_k)^2 \right) - \left(\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f | Q_k)^2 \right) = (f | Q_n)^2 \geq 0.$$

C'est bien dire la décroissance de la suite de réels positifs $(d_Q^n(f))$.

IV .2.b. Comme $d_Q^n(f) = \|\Pi_Q^n(f) - f\|$, d'après I.3.b, il suffit bien de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_Q^n(f) = 0$ pour toute fonction $f \in E$ pour prouver que Q est totale.

Soit donc f dans E , et, grâce au théorème de Weierstraß, $(T_k)_{k \geq 0}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

Fixons $\varepsilon > 0$.

Il existe $k \geq 0$ tel que $\|T_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit n le degré de T_k : $T_k \in \mathbb{R}_n[X] = V_Q^n$. Alors $\Pi_Q^n(T_k) = T_k$ et on peut écrire : $d_Q^n(f) = \|\Pi_Q^n(f) - f\| = \|\Pi_Q^n(f - T_k) + T_k - f\| \leq \|\Pi_Q^n(f - T_k)\| + \|T_k - f\| \leq 2\|T_k - f\| \leq 2\varepsilon$.

(On a déjà dit, pour toute fonction continue : $\|\Pi_Q^n(f)\| \leq \|f\| \leq \|f\|_\infty$.)

La décroissance conclut : $\forall m \geq n, d_Q^m(f) \leq 2\varepsilon$, ce qu'on voulait démontrer.

IV .2.c. $Q_0 = 1$ et clairement Φ_0 doit valoir ± 1 .

Plus généralement, montrons par récurrence qu'on doit choisir $\Phi_n = \pm Q_n$.

Supposons construits de cette façon $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$. Alors Φ_{n+1} étant de degré $n + 1$ est dans V_Q^{n+1} , et s'écrit comme combinaison linéaire des $(Q_k)_{0 \leq k \leq n+1}$. Comme on doit avoir Φ_{n+1} orthogonal à tous les Φ_k et donc à tous les Q_k pour $k \leq n$, seul le dernier coefficient est non nul : $\Phi_{n+1} = \omega Q_{n+1}$. On conclut que $\omega = \pm 1$ en imposant $\|\Phi_{n+1}\| = 1$.

Question IV.3

Le théorème de Leibniz fournit :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{d^n}{dX^n} ((X-1)^n (X+1)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} (X-1)^n \frac{d^k}{dX^k} (X+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} (X-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (X+1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Question IV.4

IV .4.a. La remarque de l'énoncé se vérifie aisément : il suffit de développer.

Alors, pour $|x| \leq 1$ et $n \geq 0$ (ce qui permet de définir sans difficulté la puissance n -ième d'un complexe), on dispose de :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{i\theta} \right)^n \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{-i\theta} \right)^n d\theta.$$

L'égalité $\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0; \\ 1, & \text{sinon;} \end{cases}$ permet dans le développement du produit ci-dessus de ne garder que quelques termes :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \sqrt{\frac{1+x}{2}}^{2(n-k)} i^{2k} \sqrt{\frac{1-x}{2}}^{2k} = \frac{1}{2^n n!} P_n(x) = L_n(x).$$

IV .4.b. Or $|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^2 = x^2 + (1-x^2)\cos^2\theta = \cos^2\theta + x^2\sin^2\theta$ *leqslant* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, et il en découle aussitôt que $\|L_n\|_\infty \leq 1$. Mais $L_n(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^n d\theta = 1$, donc finalement $\|L_n\| = 1$. De même $L_n(-1) = (-1)^n$.

Si $-1 < x < 1$, on a $|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta)^{n/2} d\theta < 1$.

Question IV.5

IV .5.a. Dérivant $n + 1$ fois l'égalité $(X^2 - 1)U'_n = 2nXU_n$, on obtient :

$$2\frac{n(n+1)}{2}P_n + 2(n+1)XP'_n + (X^2 - 1)P''_n = 2n(n+1)P_n + 2nXP'_n \text{ donc } (1 - X^2)P''_n - 2XP'_n + n(n+1)P_n = 0.$$

IV .5.b. On en déduit aussitôt que $(X^2 - 1)L''_n = -2XL'_n + n(n+1)L_n$.

Or $2^{n+1}(n+1)!L'_{n+1} = \left((X^2 - 1)U_n \right)^{(n+2)} = (X^2 - 1)P''_n + 2(n+2)XP'_n + (n+1)(n+2)P_n$, et, simplifiant par le facteur $2^n n!$, il vient :

$$\begin{aligned} 2(n+1)L'_{n+1} &= (X^2 - 1)L''_n + 2(n+2)XL'_n + (n+1)(n+2)L_n \\ &= 2(n+1)XL'_n + (n+1)(2n+2)L_n = 2(n+1)(XL'_n + (n+1)L_n), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

Question IV.6

Comme les polynômes U_n sont pairs, les polynômes P_n et donc L_n sont pairs ou impairs et les L'_n aussi.

Or $L'_0 = 0$, et L_n atteint (sur $[0, 1]$) son maximum en 1 : $L_n(1) = 1$. Ainsi, par une récurrence immédiate, le

maximum de L'_n sera atteint en $x = 1$ et vérifie $L'_{n+1}(1) = L'_n(1) + n + 1$, donc $L'_n(1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Or $Q'_n(x) = 2\alpha_n L'_n(2x - 1)$, et $k(Q_n) = \|Q'_n\|_\infty = 2\alpha_n \|L'_n\|_\infty = 2\sqrt{2n+1} \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\sqrt{2n+1}$.