

E3A MP Epreuve III

Partie I

1. Le caractère symétrique de la matrice réelle A assure qu'elle est diagonalisable. Si λ désigne une valeur propre de A , on a que la dimension de l'espace propre associé à λ est $n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$. Or la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \times & \times \\ 0 & 2 & \ddots & \times \\ \vdots & \ddots & & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

de taille $n-1$ extraite de $A - \lambda I_n$ est inversible donc $n-1 \leq \text{rg}(A - \lambda I_n)$ mais comme λ est valeur propre le rang ne peut être n . En conclusion chaque espace propre est de dimension 1, et la somme des dimensions de ces espaces propres est n donc A admet n valeurs propres distinctes.

2. Si on appelle Q_n le polynôme caractéristique de la matrice de taille n . On a $Q_2(X) = X^2 - 1 = (2-1)![XP_2(X) - (2-1)P_1(X)]$, l'égalité est donc

vérifiée pour $n=2$. Pour $n=3$ on trouve $Q_3(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} =$

$X^3 - 5X$, et $P_3(X) = \frac{X}{2}X - \frac{1}{2}$, d'où $Q_3(X) = 2 \left[X \left(\frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2X \right]$, l'égalité est donc vérifiée pour $n=3$ aussi. Soit $n-1 \geq 3$, on suppose qu'elle est vraie pour tout k tel que $2 \leq k \leq (n-1)$ alors en développant

par rapport à la dernière ligne on a

$$\begin{aligned}
Q_n(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & X & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-n & X & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-n & X \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & X & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & 2-n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-n & X \end{vmatrix} \\
&\quad + (n-1) \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & X & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-n & 1-n \end{vmatrix} \\
&= XQ_{n-1}(X) - (n-1)^2 \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -2 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= XQ_{n-1}(X) - (n-1)^2Q_{n-2}(X) \\
&= X(n-2)! [XP_{n-1}(X) - (n-2)P_{n-2}(X)] \\
&\quad - (n-1)^2(n-3)! [XP_{n-2}(X) - (n-3)P_{n-3}(X)] \\
&= X(n-1)! \left[\frac{X}{n-1}P_{n-1}(X) - \frac{n-2}{n-1}P_{n-2}(X) \right] \\
&\quad - (n-1)!(n-1) \left[\frac{X}{n-2}P_{n-2}(X) - \frac{n-3}{n-2}P_{n-3}(X) \right] \\
&= (n-1)! [XP_n(X) - (n-1)P_{n-1}(X)]
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la relation jusque n .

3. Le déterminant de A est $(-1)^n \Pi_u(0) = (-1)^n (n-1)! [-(n-1)P_{n-1}(0)]$. Il suffit donc de déterminer les $P_k(0)$. On a les relations $P_1(0) = 1$ et $P_2(0) = 0$ et

$$P_n(0) = -\frac{n-2}{n-1}P_{n-2}(0)$$

On en déduit que pour $k \geq 1$ on a $P_{2k}(0) = 0$ et

$$P_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{2k-1}{2k} \cdots \frac{1}{2} P_1(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

4. (a) Clair, c'est les propriétés d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) A est semblable à une matrice diagonale U , les termes λ_k sur la diagonale étant tous distincts, $A = PUP^{-1}$. Si $B \in \text{Co}(A)$ alors $P^{-1}BP$ est un élément de $\text{Co}(U)$. En effet $P^{-1}BPU = P^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}BAP = P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = UP^{-1}BP$. En résumé l'automorphisme (intérieur) $M \mapsto P^{-1}MP$ transforme le commutant de A en le commutant de U , donc il suffit de déterminer la dimension de celui de U (puisque un automorphisme conserve les dimensions). Si E_{ij} désigne les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $UE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ et $E_{ij}U = \lambda_j E_{ij}$. Soit $C \in \text{Co}(U)$ $C = \sum_{i,j} c_{ij} E_{ij}$, on a donc

$$CU = \sum_{i,j} c_{ij} \lambda_i E_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} \lambda_j E_{ij} = UC$$

la liberté de la famille (E_{ij}) donne $(\lambda_i - \lambda_j)c_{ij} = 0$, la matrice C ne peut être que diagonale. On vérifie que toutes les matrices diagonales conviennent (l'ensemble des matrices diagonales est une algèbre commutative). En conclusion la dimension de $\text{Co}(A) = n$.

Partie II

1. On a

$$\begin{aligned}
 q(X) &= \sum_{i=1}^n (2i-1)x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} ix_i x_{i+1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i [(x_i - x_{i+1})^2 - x_i^2 - x_{i+1}^2] \\
 &= x_1^2 - x_n^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 [(2i-1) - i - (i-1)] + (2n-1 - (n-1))x_n^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} i(x_i - x_{i+1})^2 \\
 &= nx_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i(x_i - x_{i+1})^2
 \end{aligned}$$

2. Si on écrit en ligne les formes linéaires de la question précédente on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix}
 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -1 \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

qui est de rang n donc les formes linéaires sont linéairement indépendantes, par conséquent dans la question précédente on a obtenu une décomposition en carrés de la forme quadratique, on en déduit que le rang est n et la signature $(n, 0)$.

3. (a) En remarquant que $jU_j - (j-1)U_{j-1} = u_j$ pour $2 \leq j \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{1 \leq j \leq n} u_j U_j - \sum_{1 \leq j \leq n} U_j^2 &= 2U_1^2 + \sum_{2 \leq j \leq n} 2U_j [jU_j - (j-1)U_{j-1}] - \sum_{1 \leq j \leq n} U_j^2 \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} (2j-1)U_j^2 - \sum_{2 \leq j \leq n} 2(j-1)U_j U_{j-1} \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} (2j-1)U_j^2 - \sum_{1 \leq j \leq n-1} 2jU_j U_{j+1} \\
 &= q(U) \geq 0
 \end{aligned}$$

où U désigne (U_1, \dots, U_n) . Cela prouve l'inégalité demandée.

(b) En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (dans \mathbb{R}^n euclidien), on obtient

$$S_n = \sum_{j=1}^n U_j^2 \leq 2 \sum_{j=1}^n u_j U_j \leq 2 \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n U_j^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} u_j^2} \sqrt{S_n}$$

La suite (S_n) est croissante et supposons qu'elle ne soit pas majorée alors elle tend vers $+\infty$, mais alors on aurait pour n assez grand

$\sqrt{S_n} \leq 2\sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} u_j^2}$, et $\sqrt{S_n}$ qui tend vers $+\infty$ d'où une contradiction. En conclusion la suite (S_n) est convergente, c'est à dire la série $\sum U_n^2$ est convergente.

Partie III

1. Si on applique, pour le produit scalaire φ , la méthode de Schmidt sur la base canonique \mathfrak{B} de \mathbb{R}^n on obtient une base orthonormale que l'on peut appeler \mathfrak{B}' . La matrice de passage de \mathfrak{B} à \mathfrak{B}' est triangulaire supérieure on va la noter P . La formule de changement de base donne la relation $PX' = X$, d'où

$$\varphi(X, Y) = {}^t XSY = {}^t (PX')SPY' = {}^t X' [{}^t PSP] Y'$$

Et ${}^t PSP$ représente la matrice du produit scalaire φ relativement à la base \mathfrak{B}' , qui est orthonormale donc c'est la matrice unité I_n . On obtient donc ${}^t PSP = I_n$ d'où $S = {}^t P^{-1}P^{-1}$ et P est la matrice de passage de \mathfrak{B} à \mathfrak{B}' et elle est triangulaire supérieure.

2. Si on appelle $c_{i,j}$ le terme général de la matrice P^{-1} , qui est triangulaire supérieure, on a

$$\det S = (\det(P^{-1}))^2 = \left[\prod_{k=1}^n c_{k,k} \right]^2 = \prod_{k=1}^n (c_{k,k})^2$$

et

$$(c_{i,i})^2 \leq s_{i,i} = \sum_{k=1}^n (c_{k,i})^2$$

Cela donne $\det S \leq \prod_{k=1}^n s_{k,k}$.

Partie IV

1. (a) Dans les notations il est rappelé que pour une matrice définie positive U on a $\|U\| = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ et comme $Sp(U) \subset]0, R[$ on a $\|U\| < R$ ce qui est suffisant pour assurer la convergence absolue de la série $\sum b_k U^k$ et donc sa convergence puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est complet. Et comme pour tout N et $X \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^t X \sum_{k=0}^N b_k U^k X \geq 0$ (les b_k sont positifs et $U^k > 0$) on en déduit par passage à la limite que $g(U) \geq 0$. Il suffit de prouver que $g(U)$ est inversible pour que l'on ait $g(U) > 0$. Or U comme matrice symétrique réelle est diagonalisable ainsi que les U^k dans une même base, ce qui donne

$$P^{-1} \sum_{k=0}^N b_k U^k P = \sum_{k=0}^N b_k D^k \rightarrow \begin{pmatrix} g(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Et comme $0 < b_0 < g(\alpha_i)$, on a $g(D)$ inversible ce qui donne $g(U)$ inversible.

- (b) Par la question précédente on a $\det g(U) = \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$.

2. (a) La matrice symétrique réelle U est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres donc il existe une matrice orthogonale V telle que

$${}^tVUV = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \implies U = VD^tV$$

Ce qui donne

$$u_{i,i} = \sum_{k=1}^n v_{i,k} \alpha_k v_{i,k} = \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 \alpha_k$$

- (b) Par la question précédente, si on note $m = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ et $M = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$, on a

$$0 < m = \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 m \leq \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 \alpha_k = u_{i,i} \leq \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 M = M < R$$

- (c) La fonction $\ln \circ g$ est supposée convexe donc $\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ on a

$$\ln \circ g(u_{i,i}) = \ln \circ g \left(\sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 \alpha_k \right) \leq \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 \ln \circ g(\alpha_k)$$

En composant par l'exponentielle (qui est croissante) on obtient

$$0 < g(u_{i,i}) \leq \prod_{k=1}^n \exp[v_{i,k}^2 \ln \circ g(\alpha_k)]$$

Et en multipliant chacune de ces relations on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n g(u_{i,i}) &\leq \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^n \exp[v_{i,k}^2 \ln \circ g(\alpha_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left[\sum_{i=1}^n v_{i,k}^2 \ln \circ g(\alpha_k) \right] \\ &= \prod_{k=1}^n \exp[\ln \circ g(\alpha_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n g(\alpha_k) = \det g(U) \end{aligned}$$

- (d) On peut remarquer que dans la preuve de 1 on a seulement besoin d'un seul $b_k > 0$ les autres étant positifs ou nuls. Si on prend $g(x) = x$ le rayon est infini et l'application $\ln \circ g$ sera concave d'où l'inégalité

$$\det U = \det g(U) \leq \prod_{i=1}^n g(u_{i,i}) = \prod_{i=1}^n u_{i,i}$$

Partie V

1. On remarque que la matrice J est de rang 1 donc 0 est valeur propre de J d'où $a - b$ est valeur propre de U . nb est valeur propre de J ($(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre) d'où $a + (n - 1)b$ est valeur propre de U . Le spectre de U est constitué de $a - b$ et $a + (n - 1)b$.

2. U est une matrice symétrique réelle n'ayant que des valeurs propres strictement positives, elle est donc définie positive, $U > 0$. $g(x) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, le rayon de convergence est infini, chaque coefficient est strictement positif, et $Sp(U) \subset]0, +\infty[$. Et l'on a $(\ln(1 + e^x))'' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, donc la fonction $\ln \circ g$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

3. On a

$$\begin{aligned} U^2 &= (a - b)^2 I_n + 2(a - b)J + J^2 \\ &= (a - b)^2 I_n + 2(a - b)J + nbJ \\ &= (2a + (n - 2)b)U + [(a - b)^2 - [2a - (n - 2)b](a - b)]I_n \end{aligned}$$

Ce qui donne $X^2 - (2a + (n - 2)b)X + (a - b)(a - b + nb)$ comme polynôme annulateur de U .

4. La matrice U est diagonalisable (symétrique réelle, polynôme annulateur scindé à racines simples...), en appelant p et q les projecteurs associés à la somme directe des espaces propres, on a

$$\begin{cases} p & + & q & = & I_n \\ (a - b)p & + & (a + (n - 1)b)q & = & U \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p & = & \frac{1}{(n-2)b} [(a + (n - 1)b)I_n - U] \\ q & = & \frac{1}{(n-2)b} [(b - a)I_n + U] \end{cases}$$

Ce qui donne $U^k = (a - b)^k p + (a + (n - 1)b)^k q$, et $\exp(U) = e^{a-b} p + e^{a+(n-1)b} q$.

5. $\det(I_n + \exp(U)) = \prod_{i=1}^n (1 + e^{\alpha_i}) = (1 + e^{a-b})^{n-1} (1 + e^{a-b+nb})$

6. Comme la signature de la forme quadratique $X \mapsto {}^t X U X$ est (3,0) on en déduit que la quadrique d'équation ${}^t X U X = 1$ est un ellipsoïde. (Il est de révolution car il y a deux valeurs propres identiques.)