

Corrigé de la première épreuve de mathématique
Centrale PSI 2022
 daouia_abdelkader@hotmail.fr

I Partie I :

I – A Quelques résultats préliminaires :

Q 1

La trace est linéaire et à valeurs dans \mathbb{R} , c'est donc une forme linéaire.
 Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 On pose $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $BA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a les relations suivantes :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad , \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \quad , \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}$$

Si on fait le changement d'indice $i \longleftrightarrow k$, on remarque qu'il s'agit de la même expression .

Q 2

On pose $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$.

(a) $\langle B, A \rangle = tr(B^T A) = tr((B^T A)^T) = tr(A^T B) = \langle A, B \rangle$ (symétrique).

(b) La bilinéarité est évidente .

(c) $\langle A, A \rangle = tr(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \geq 0$

On a l'égalité $\langle A, A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{i,k}^2}_{\geq 0} = 0 \iff a_{i,k}^2 = 0 \quad \forall (i, k) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2 \iff A = 0$

Q 3

$A^T A = 0 \implies tr(A^T A) = 0 = \langle A, A \rangle \implies A = 0$ (c'est un produit scalaire) .

I.B - Quelques propriétés de \mathcal{N}_n

Q 4

A est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0$, soit λ une valeur propre de A , et $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$0 = A^p X = \lambda^p X \implies \lambda = 0$$

Comme $0 = \det(A^p) = (\det(A))^p \implies \det(A) = 0$, A n'est pas inversible, donc 0 est une valeur propre de A .

Q 5

Comme 0 est la seule valeur propre :

(a) $tr(A) = 0$: c'est la somme des valeurs propres .

(b) $\det(A) = 0$: c'est le produit des valeurs propres.

Q 6

M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$: $M^p = 0 \implies M^{2p} = (M^2)^p = 0$, M^2 est nilpotente .

Q 7

$MN = NM$, $\exists(p, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $M^p = N^q = 0$:

(a) $(MN)^p = M^p N^p = 0$ ($MN = NM$).

(b) $(M + N)^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} M^i N^{p+q-i}$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+q}{i} M^i \underbrace{N^{p+q-i}}_{=0} + \sum_{i=p}^{p+q} \binom{p+q}{i} \underbrace{M^i}_{=0, i \geq p} N^{p+q-i} = 0$$

Q 8

$M, N, M + N$ sont nilpotentes ,d'après la question 6, $M^2, N^2, (M + N)^2$ sont nilpotentes et d'après la question 5 :

$$\text{tr}(M^2) = \text{tr}(N^2) = \text{tr}((M + N)^2) = 0$$

$$0 = \text{tr}((M + N)^2) = \text{tr}(M^2) + \text{tr}(MN) + \text{tr}(NM) + \text{tr}(N^2) \implies 2 \text{tr}(MN) = 0$$

$$(\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM))$$

Q 9

Si M est nilpotente , alors $\text{tr}(M) = \det(M) = 0$, d'après la question 5.
Réciproquement , pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(X) = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$$

Si $\text{tr}(M) = \det(M) = 0$, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton :

$$0 = \chi_M(M) = M^2$$

M est donc nilpotente.

Q 10

Soit M une matrice symétrique réelle , elle est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale D d'après le théorème spectral , et puisqu'elle est nilpotente , 0 est la seule valeur propre de M . M est semblable à la matrice nulle , donc $M = 0$.

Q 11

$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et nilpotente . Soit $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0$, $(A^T A)^p = (-1)^p A^{2p} = 0$

La matrice $A^T A$ est symétrique réelle et nilpotente , en utilisant la question précédente et la question et la question 3 , on a :

$$A^T A = 0 \implies A = 0$$

Q 12 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{tr}(A) = 0 = \det(A)$, $A^{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{2k+1} = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

II.A - Quelques résultats algébriques .

Q 13

$$E_i = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}(V - 2E_i), \quad V - 2E_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ le } -1 \text{ est sur la } i\text{-ème position.}$$

$V, V - 2E_i$ sont dans $\mathcal{V}_{n,1}$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_n) \subset \text{Vect}(\mathcal{V}_{n,1}) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Q 14

On note $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : (C_1, C_2, \dots, C_i) \text{ est libre}\}$, I est non vide, car $1 \in I$, majoré par $n - 1$, car $n \notin I$, on note $j = \max(I)$:

(C_1, C_2, \dots, C_j) est libre, $(C_1, C_2, \dots, C_{j+1})$ est liée. Il existe $(a_1, a_2, \dots, a_{j+1}) \in \mathbb{R}^{j+1}$ non tous nuls, tel que :

$$\sum_{i=1}^{j+1} a_i C_i = 0$$

Supposons que $a_{j+1} = 0$, on va avoir

$$\sum_{i=1}^j a_i C_i = 0 \implies a_i = 0, \quad i \in \llbracket 1, j \rrbracket \implies a_i = 0, \quad i \in \llbracket 1, j+1 \rrbracket$$

Ce qui est absurde.

$$C_{j+1} = -\sum_{i=1}^j \frac{a_i}{a_{j+1}} C_i \implies C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_j)$$

Q 15

La famille (U_1, U_2, \dots, U_d) est une famille libre, la matrice M dont les colonnes sont les U_j est de rang d , on peut extraire de cette matrice une sous matrice carré de taille d qui est inversible, les lignes de cette sous matrice sont $i_1 < i_2 < \dots < i_d$ et toutes les autres lignes sont une combinaison linéaire de ces lignes.

L'application définie est donc injective, et l'égalité des dimensions achève.

Q 16

Un élément de \mathcal{W} est déterminé par seulement d composantes, et pour chaque élément de $\mathcal{V}_{n,1}$, les composantes ont seulement deux possibilités 1 ou -1 , il y a au plus 2^d possibilités (il y a des vecteurs qui ne sont pas dans l'intersection).

II.B - Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle suit la loi \mathcal{R} (La loi de Rademacher) si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Q 17

X suit la loi \mathcal{R} , $Z = \frac{1}{2}(X + 1)$

$$Z(\Omega) = \{-1, 1\} \quad , \quad \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Z suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Q 18

La loi Z est usuelle , $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}$, et on a la relation : $X = 2Z - 1$:

$$\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(Z) - 1 = 0 \quad , \quad \mathbb{V}(X) = 4\mathbb{V}(Z) = 1$$

On rappelle $\mathbb{E}(aZ + b) = a\mathbb{E}(Z) + b$, $\mathbb{V}(aZ + b) = a^2\mathbb{V}(Z) \quad \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Q 19

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} = Y(\Omega) \quad , \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1).$$

$$(a) \quad W = XY \quad , \quad W(\Omega) = \{-1, 1\}$$

$$(b) \quad (W = 1) = ((X = 1) \cap (Y = 1)) \cup ((X = -1) \cap (Y = -1)) \implies \mathbb{P}(W = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad (W = -1) = ((X = 1) \cap (Y = -1)) \cup ((X = -1) \cap (Y = 1)) \implies \mathbb{P}(W = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

XY suit la loi \mathcal{R} .

II.C - Un premier procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Q 20

$\tau_n = \text{tr}(M_n) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$, les variables sont indépendantes et suivent la même loi :

$$\mathbb{E}(\tau_n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(m_{i,i})}_0 = 0 \quad , \quad \mathbb{V}(\tau_n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{V}(m_{i,i})}_1 = n$$

Q 21

On développe le déterminant suivant la première colonne :

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} m_{i,1} \det(M_n^i)$$

Où M_n^i est la matrice M_n amputée de la première colonne et la i -ème ligne . Les variables sont indépendantes , on a alors :

$$\mathbb{E}(\delta_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \underbrace{\mathbb{E}(m_{i,1})}_{=0} \mathbb{E}(\det(M_n^i)) = 0$$

Q 22

Pour $n = 1$ c'est trivial .

On suppose que la propriété est vérifiée à l'ordre $n - 1$.

$$\mathbb{E}(\delta_{n-1}) = 0 \quad , \quad \mathbb{V}(\delta_{n-1}) = \mathbb{E}(\delta_{n-1}^2) = (n - 1)!$$

$$\delta_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+1} m_{i,1} \det(M_n^i) (-1)^{j+1} m_{j,1} \det(M_n^j)$$

Les variables $m_{i,1}$, $m_{j,1}$ sont indépendantes de $\det(M_n^i)$, $\det(M_n^j)$, mais $m_{i,1}$, $m_{j,1}$ ne sont indépendantes que si $i \neq j$

(a) Si $i = j$ $m_{i,1} m_{j,1} = 1$:

(b) Si $i \neq j$, $\mathbb{E}(m_{i,1} m_{j,1}) = \mathbb{E}(m_{i,1}) \mathbb{E}(m_{j,1}) = 0$

$$\mathbb{E}(\delta_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \mathbb{E}(m_{i,1} m_{j,1}) \mathbb{E}(\det(M_n^i) \det(M_n^j))$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(m_{i,1}^2)}_{=1} \underbrace{\mathbb{E}(\det(M_n^i)^2)}_{=\mathbb{V}(\delta_{n-1})} = n(n-1)! = n!$$

Q 23

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2$$

$$\iff 0 = \text{tr}(M_2) = m_{1,1} + m_{2,2}, \quad \det(M_2) = 0 = m_{1,1} m_{2,2} - m_{1,2} m_{2,1} = -1 - m_{1,2} m_{2,1}$$

Si on choisit $m_{1,1}$ et $m_{1,2}$, les autres coefficients sont fixés. Il y a donc 4 possibilités sur 16.

$$\mathbb{P}(M_2 \in \mathcal{N}_2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Q 24

$$M_2 \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \iff m_{1,1} m_{2,2} - m_{1,2} m_{2,1} \neq 0$$

On peut choisir $m_{1,1}$, $m_{2,2}$, $m_{1,2}$ comme on veut, pour $m_{2,1}$, un choix donne 0 et l'autre $\neq 0$, il y a donc un seul choix de $m_{2,1}$ pour que la matrice soit inversible, sachant que les trois premières composantes sont déjà choisies.

$$\mathbb{P}(M_2 \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})) = \frac{2 * 2 * 2}{16} = \frac{1}{2}$$

II.D Généralisation

II.D - 1) :

Q 25

Les variables sont mutuellement indépendantes, :

$$\mathbb{P}((c_1 = \varepsilon_1) \cap \dots \cap (c_n = \varepsilon_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}((c_i = \varepsilon_i)) = \frac{1}{2^n}$$

Q 26

Le vecteur $C \neq 0$, donc $\{C\}$ est libre, la famille (C, C') est liée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} : C' = \lambda C$, mais comme les composantes des deux vecteurs sont dans $1, -1$, on doit avoir $\lambda = 1$ ou -1 .

Q 27

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((C, C') \text{ est liée}) &= \mathbb{P}(C = C') + \mathbb{P}(C = -C') \\
&= \mathbb{P}((c_1 = c'_1) \cap \dots \cap (c_n = c'_n)) + \mathbb{P}((c_1 = -c'_1) \cap \dots \cap (c_n = -c'_n)) \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

II.D.2) :

Q 28

Pour une famille (C_1, C_2, \dots, C_n) , soit la famille est libre, dans ce cas R_n est réalisé, soit la famille est liée, dans ce cas, d'après la question Q 14, il existe un unique $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que R_j est réalisé. Les événements sont incompatibles, donc la famille est un système complet d'événements.

Q 29

D'après la formule de probabilité totale :

$$\mathbb{P}(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}((M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \cap R_j)$$

$\mathbb{P}((M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \cap R_n) = 0$ car si les matrices n'est pas inversible, les colonnes sont liées.

Pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$((M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \cap R_j) \subset (C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_j))$$

$$\implies \mathbb{P}((M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \cap R_j) \leq \mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_j))$$

On somme, et on trouve le résultat.

Q 30

On introduit le système complet d'événements :

$$\{(C_1 = v_1) \cap \dots \cap (C_j = v_j), (v_1, v_2, \dots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j\}$$

Puis on applique la formule de probabilité totale.

Q 31 Pour $(v_1, v_2, \dots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j$, $C_{j+1} \in \text{Vect}((v_1, v_2, \dots, v_j))$, il y a au plus 2^j combinaisons possibles, et le nombre de possibilités pour C_{j+1} est 2^n , ainsi :

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_j)) \leq \frac{2^j}{2^n} = 2^{j-n}$$

On majore à l'intérieur de la somme, et le reste c'est 1, on finit par trouver la majoration escomptée.

Q 32

$$\mathbb{P}(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-j}} = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\mathbb{P}(M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \leq 1 - (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

III Un autre procédé de construction de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Q 33

```
def modifie_matrice(p, A) :
n = len(A)
return np.array([[A[i, j] if A[i, j] != 1
else binomial(p) for j in range(n)] for i in range(n)])
```

Q 34

```
def nb_tours(p, n) :
A = np.ones((n, n), dtype=int)
k = 0
while not np.array_equal(A, np.ones((n, n))) :
A = modifie_matrice(p, A)
k = k + 1
return k
```

Q 35

```
def moyenne_tours(p, n, nbr) :
return sum(nb_tours(p, n) for i in range(nbr))/nbr
```

IV Vecteurs aléatoires unitaires

Q 36

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une suite de vecteurs unitaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$0 \leq |\langle u_i, u_j \rangle| \leq \|u_i\| \|u_j\| = 1$$

L'ensemble $\{|\langle u_i, u_j \rangle|, (i, j) \in I^2, i \neq j\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} , majorée, sa borne supérieure existe et on a $C(u) \in [0, 1]$

Q 37

Si on suppose $C(u) = 0$, alors $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j$, la famille u est orthonormale, elle est donc libre et on a la majoration :

$$\text{card}(u) \leq \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$$

Q 38

On rappelle le développement en série entière usuel :

$$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On remarque que

$$(2n)! \geq \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$$

Comme tous les termes sont positifs :

$$\text{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Q 39

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X, Y \rangle)) = \mathbb{E}(\exp(\sum_{i=1}^n \frac{t}{n} X_i Y_i))$$

Les variables $X_i Y_i$ sont indépendants , on peut donc écrire :

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X, Y \rangle)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(\frac{t}{n} X_i Y_i))$$

D'après la question 19 , $X_i Y_i$ suit la loi \mathcal{R} :

$$\mathbb{E}(\exp(\frac{t}{n} X_i Y_i)) = \frac{1}{2} \exp(\frac{t}{n}) + \frac{1}{2} \exp(-\frac{t}{n}) = ch(\frac{t}{n})$$

On a donc le résultat :

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X, Y \rangle)) = \prod_{i=1}^n ch(\frac{t}{n}) = \left(ch(\frac{t}{n}) \right)^n$$

Q 40

On utilise les deux questions précédentes :

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X, Y \rangle)) = \left(ch(\frac{t}{n}) \right)^n \leq \left(\exp(\frac{t^2}{2n^2}) \right)^n = \exp(\frac{t^2}{2n})$$

Q 41

L'inégalité de Markov s'applique pour des variables à valeurs positives .

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) = \mathbb{P}(tZ \geq t\lambda) \quad \forall t \geq 0$$

$$= \mathbb{P}(e^{tZ} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tZ})}{e^{t\lambda}} \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

Q 42

Pour optimiser la majoration dans la question précédente , on va étudier la fonction définie sur $[0, +\infty[: t \mapsto \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t$, on trouve facilement que son minimum est atteint au point $t_0 = \frac{\sigma^2}{\lambda}$, en prenant cette valeur pour t , on a la majoration :

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$$

On fait de même pour $\mathbb{P}(Z \leq -\lambda)$, et on a :

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda) + \mathbb{P}(Z \leq -\lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$$

Q 43

On pose $Z = \langle X, Y \rangle$, cette variable vérifie d'après la question 40, la propriété utilisée dans les questions 41 – 42 , avec $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on applique directement la question 42 , avec $\lambda = \varepsilon$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et on trouve le résultat.

Q 44

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\cup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i, X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}\left(|\langle X^i, X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right) = N(N-1) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right) \end{aligned}$$

Le nombre de couple tel que $1 \leq i < j \leq N$ est $\frac{N(N-1)}{2}$

Q 45

$$\mathbb{P}\left(\cup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i, X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right) \leq N(N-1) \exp(-2 \ln(N)) = \frac{N-1}{N} < 1$$

Q 46

$$N \leq \exp\left(\frac{n\varepsilon^2}{4}\right) \iff n \geq \frac{4 \ln(N)}{\varepsilon^2}$$

et on applique la question précédente.