E3A MP MATHS 1 (2016)

1 Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ -1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$ $\quad C_2 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$= x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x+3 & -1 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$ $\quad C_2 \leftarrow C_1 + C_2 \quad$ $= x \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = x(x+1)(x+3).$

Conclusion : $\chi_A(X) = X(X+1)(X+3)$ et le spectre de A est l'ensemble $\{0, -1, -3\}$.

2. Après calcul : $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$, $\mathrm{Ker}\,(A+I_3) = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big)$ et $\mathrm{Ker}\,(A+3I_3) = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1)\big)$. Les trois vecteurs ainsi exhibés sont deux à deux orthogonaux — conformément au théorème spectral, même s'il ne sert à rien de l'invoquer ici. Posons alors : $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. La matrice P orthogonale car on a rendu ses colonnes unitaires, et outre : $P^\top AP = D$.

3. Bien sûr : $0 \in \mathscr{C}(A)$ car : $0 \times A = 0 = A \times 0$. Pour la stabilité par combinaison linéaire, pour tous $M, N \in \mathscr{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA \overset{M,N \in \mathscr{C}(A)}{=} \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N)$, donc : $\lambda M + \mu N \in \mathscr{C}(A)$.

4. Toute puissance de A commute à A, donc $\mathscr{C}(A)$ contient I_3, A et A^2, et comme c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après **3.**, il contient toutes leurs combinaisons linéaires, i.e. F.

5. Pour tout $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$B \in \mathscr{C}(A) \quad \iff \quad BA = AB \quad \overset{\mathbf{2.}}{\iff} \quad PDP^\top B = BPDP^\top \quad \overset{P^\top \times \ldots \times P}{\iff} \quad DP^\top BP = P^\top BPD.$$

6. D'après **5.**, pour tout $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $B \in \mathscr{C}(A) \iff P^\top BP \in \mathscr{C}(D)$, si on note $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent à D. L'application $B \longmapsto P^\top BP$ se trouve alors être un isomorphisme de $\mathscr{C}(A)$ sur $\mathscr{C}(D)$ — de réciproque $B' \longmapsto PB'P^\top$. Or il n'est pas dur de vérifier que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc : $\dim \mathscr{C}(D) = 3$, et enfin par isomorphisme : $\dim \mathscr{C}(A) = 3$.

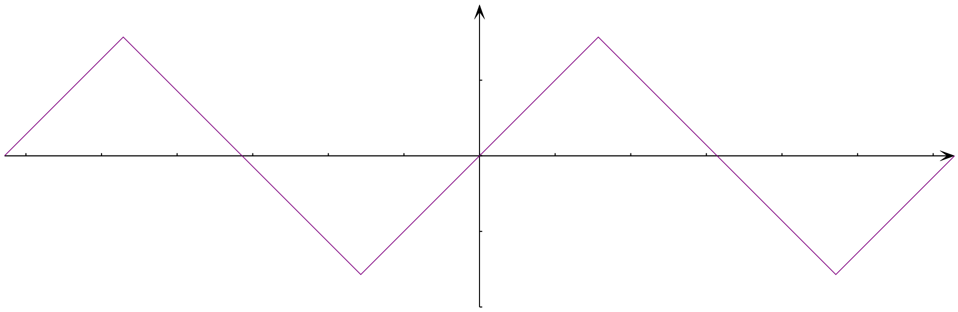
7. D'après **4.** et **6.**, il nous reste à montrer que : $\dim F \geqslant 3$, i.e. que la famille $\big(I_3, A, A^2\big)$ de F est libre. Or pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, si : $\lambda I_3 + \mu A + \nu A^2 = 0$, alors après calcul de A^2 : $\lambda = \mu = \nu = 0$.

8. Comme A^3 commute à A : $A^3 \in \mathscr{C}(A) \overset{7.}{=} F$.

9. **Preuve 1 :** Notons e_1, e_2 et e_3 les vecteurs propres de A trouvés en **2.** : $e_1 = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$, $e_2 = \dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$ et $e_3 = \dfrac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}$. Alors : $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $(\mathrm{Ker}\, A)^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, donc : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En particulier, la matrice de p dans (e_1, e_2, e_3) commute à D, donc après changement de base grâce à la matrice orthogonale P, la matrice B de p dans la base canonique commute à A d'après **5.**.

Preuve 2 : D'après **1.**, $\left(\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, A$, en outre p est un projecteur orthogonal, donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $p(x,y,z) = \left((x,y,z) \cdot \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right) \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{(x+y+z, x+y+z, x+y+z)}{3}$ et enfin : $B = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il n'est alors pas dur de vérifier que : $AB = 0 = BA$, et donc que : $B \in \mathscr{C}(A)$.

2 Exercice 2

1. 

2. Tout d'abord, la fonction nulle est bien continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. Pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $f,g\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. L'énoncé rappelle que : $\lambda f+\mu g\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Ensuite, $\lambda f+\mu g$ est 2π-périodique et impaire car pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$(\lambda f+\mu g)(t+2\pi)=\lambda f(t+2\pi)+\mu g(t+2\pi)\overset{f,g\in E}{=}\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t)$$

$$\text{et}\qquad (\lambda f+\mu g)(-t)=\lambda f(-t)+\mu g(-t)\overset{f,g\in E}{=}-\lambda f(t)-\mu g(t)=-(\lambda f+\mu g)(t).$$

3. Linéarité par rapport à la première variable et symétrie évidentes. La linéarité par rapport à la deuxième variable en découle. Pour la positivité et la séparation, soit $f\in E$. Alors : $\varphi(f,f)=\int_0^\pi f(t)^2\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, et si : $\varphi(f,f)=0$, alors comme la fonction $t\longmapsto f(t)^2$ est continue et positive ou nulle sur $[0,\pi]$, elle y est identiquement nulle. Cette nullité se transmet à $[-\pi,0]$ par imparité, puis à $\mathbb{R}$ tout entier par 2π-périodicité.

4. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$ distincts : $(s_m|s_n)=\int_0^\pi \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^\pi\Big(\cos\big((m-n)t\big)-\cos\big((m+n)t\big)\Big)\,\mathrm{d}t$

$$\underset{m+n\neq0}{\overset{m-n\neq0}{=}}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((m-n)t\big)}{m-n}-\frac{\sin\big((m+n)t\big)}{m+n}\right]_{t=0}^{t=\pi}=0.$$

5. $$(v|s_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)\sin t\,\mathrm{d}t\overset{u=\pi-t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{IPP}}{=}2\big[-t\cos t\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=2\big[\sin t\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=2$$

et : $(s_1|s_1)=\int_0^\pi\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi}=\frac{\pi}{2}.$

6. $$(v|s_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(2t)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t\overset{u=\pi-t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(2t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin(2u)\,\mathrm{d}u=0.$$

7. D'après **4.**, $\left(\frac{s_1}{||s_1||},\frac{s_2}{||s_2||}\right)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(s_1,s_2)$, donc : $v=\left(v\,\middle|\,\frac{s_1}{||s_1||}\right)\frac{s_1}{||s_1||}+\left(v\,\middle|\,\frac{s_2}{||s_2||}\right)\frac{s_2}{||s_2||}\overset{\mathbf{5.}}{=}\frac{4s_1}{\pi}.$

8. (a) Les solutions de l'équation homogène : $y'+y=0$ sont toutes les fonctions $t\longmapsto\lambda\mathrm{e}^{-t}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
On cherche ensuite une solution particulière **complexe** de l'équation : $y'+y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ sous la forme $t\longmapsto a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Après calcul, la fonction $t\longmapsto\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ convient.
Les solutions de l'équation : $y'+y=\sin t$ sont finalement toutes les fonctions :

$$t\longmapsto\lambda\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)=\lambda\mathrm{e}^{-t}+\frac{\sin t-\cos t}{2},\qquad\lambda\text{ décrivant }\mathbb{R}.$$

(b) D'après **7.** et le principe de superposition, les solutions de l'équation : $y'+y=v_2=\frac{4\sin t}{\pi}$ sont toutes les fonctions : $t\longmapsto\lambda\mathrm{e}^{-t}+\frac{4}{\pi}\times\frac{\sin t-\cos t}{2}=\lambda\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{\pi}\,(\sin t-\cos t)$, λ décrivant $\mathbb{R}$. Une seule d'entre elles s'annule en 0, obtenue pour $\lambda=\frac{2}{\pi}$: $t\longmapsto\frac{2}{\pi}\,\big(\mathrm{e}^{-t}+\sin t-\cos t\big)$.

9. Code Python :

```
from math import *

def v_0_pi(t):
    if t<pi/2:
        return t
    else:
        return pi-t
```

10. Code Python :

```
def v(t):
    t = t-floor(t/(2*pi))*(2*pi)
    if t<pi:
        return v_0_pi(t)
    else:
        return -v_0_pi(t-pi)
```

11. Code Python :

```
N = 100

t = [k*pi/N for k in range(N+1)]
y = [0]*(N+1)

for k in range(N):
    y[k+1] = y[k]+pi/N*(v(t[k])-y[k])
```

12. Code Python :

```
def rectangles(u, a, b, n):
    return (b-a)/n*sum([u(a+k*(b-a)/n) for k in range(n)])
```

13. Code Python :

```
a, b, n = 0, pi, 100

def f(t):
    return v(t)*sin(3*t)

def g(t):
    return sin(3*t)**2

rectangles(f, a, b, n)/rectangles(g, a, b, n)
```

3 EXERCICE 3

1. Soit $x > 0$. Tout d'abord, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite, pour tout $a \geqslant 0$:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \overset{u=2xt}{=} \frac{1}{2x}\int_0^{2ax} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{Arctan}(2ax)}{2x} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4x}.$$

Ce calcul montre à la fois que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\pi}{4x}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors : $\dfrac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2x^2}$, or la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ converge. Cela justifie la bonne définition de F sur $\mathbb{R}^*$, et bien sûr F est paire.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$. D'après **2.**, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]a, b[$.
Ensuite, pour tout $x \in]a, b[$: $u_n'(x) = -\dfrac{8n^2x}{\left(1+4n^2x^2\right)^2}$, donc : $\left|u_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{8n^2x}{16n^4x^4} = \dfrac{1}{2n^2x^3} \leqslant \dfrac{1}{2n^2a^3}$. Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]a, b[$, donc aussi uniformément. Comme voulu, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ — de dérivée $x - 8x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(1+4n^2x^2\right)^2}$. Comme c'est vrai pour tous $a, b > 0$ avec $a < b$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et même sur $\mathbb{R}^*$ par parité d'après **2.**.

4. Soit $x>0$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{1+4k^2x^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$, donc : $\displaystyle\frac{1}{1+4k^2x^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$, puis pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+4k^2x^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}=\int_0^n\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$. Nous pouvons faire tendre n vers $+\infty$ d'après **1.** et **2.** : $F(x)\leqslant\dfrac{\pi}{4x}$.

5. Comme en **4.** : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}\leqslant\frac{1}{1+4k^2x^2}$, donc : $\displaystyle\int_0^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}=\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+4k^2x^2}$, et enfin : $\dfrac{\pi}{4x}\leqslant\underbrace{1}_{k=0}+F(x)$, donc : $F(x)\geqslant\dfrac{\pi}{4x}-1$.

6. Pour tout $x>0$, d'après **4.** : $0\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{\pi}{4x}$, donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. De la même manière, d'après **4.** et **5.** : $1-\dfrac{4x}{\pi}\leqslant\dfrac{4xF(x)}{\pi}\leqslant 1$, donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{4xF(x)}{\pi}=1$, i.e. : $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{4x}$.

7. **Preuve 1 :** Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, d'après **3.** : $\displaystyle F'(x)=-8x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\left(1+4n^2x^2\right)^2}$, donc $F'(x)$ est du signe de $-x$. Conclusion : F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve 2 : Soient $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ avec $x<y$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{1+4k^2y^2}\leqslant\dfrac{1}{1+4k^2x^2}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+4k^2y^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+4k^2x^2}$, et enfin après passage à la limite : $F(y)\leqslant F(x)$. La fonction F est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité d'après **2.**.

8. Soit $x>0$. La fonction $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur $\dfrac{1}{2x}$ car : $\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{t}{2xt}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{2x}\underset{t\to0}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2x}$.

Et au voisinage de $+\infty$? Pour tout $t\geqslant1$: $\left|\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\right|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-2xt}$, or la fonction $t\longmapsto\mathrm{e}^{-2xt}$ est de signe constant sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-2xt}\,\mathrm{d}t$ converge. Il en découle d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$ converge, puis que la fonction étudiée $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

9. Soient $\varepsilon>0$. Pour tout $x\geqslant\varepsilon$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur $\dfrac{1}{2x}$ d'après **8.**, et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Enfin, pour tous $x\geqslant\varepsilon$ et $t\in\mathbb{R}_+$: $\left|\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\right|=\dfrac{|\sin t|}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\leqslant\dfrac{|\sin t|}{\mathrm{e}^{2\varepsilon t}-1}$ et nous avons vu en **8.** que la fonction $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2\varepsilon t}-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction G est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$, et comme c'est vrai pour tout $\varepsilon>0$, elle l'est même sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Soit $\alpha>0$. Pour tout $x>0$:

$$\int_0^x\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin t\,\mathrm{d}t=\mathrm{Im}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-\alpha)t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-\alpha)t}}{\mathrm{i}-\alpha}\right]_{t=0}^{t=x}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-\alpha)x}-1}{\mathrm{i}-\alpha}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\alpha-ß}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha+ß}{1+\alpha^2}\right)=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Ce calcul prouve à la fois que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin t\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{1}{1+\alpha^2}$.

11. Pour tous $t>0$, $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-2kxt}\sin t=\mathrm{e}^{-2xt}\sin t\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-2kxt}\overset{xt\neq0}{=}\mathrm{e}^{-2xt}\sin t\times\frac{1-\mathrm{e}^{-2nxt}}{1-\mathrm{e}^{-2xt}}=\frac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\left(1-\mathrm{e}^{-2nxt}\right)\ \underset{n\to+\infty}{\overset{xt>0}{\longrightarrow}}\ \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}.$$

12. Soit $x>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\longmapsto\mathrm{e}^{-2nxt}\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum\mathrm{e}^{-2nxt}\sin t$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **11.** vers la fonction continue $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}$. En $t=0$, la série $\sum\mathrm{e}^{-2nxt}\sin t$ converge vers 0. Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt}-1}$ est prolongeable par continuité en 0 d'après **8.**, on peut finalement affimer que la série $\sum e^{-2nxt}\sin t$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue par morceaux.

Il nous reste à montrer, en vue d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme, que la série $\sum \int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-2nxt}\,dt$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-2nxt}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \left|\sin\frac{u}{n}\right| e^{-2xu}\,du \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} u e^{-2xu}\,du.$ La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-2nxt}\,dt$ aussi. Conclusion :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \overset{\mathbf{10.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-2nxt}\sin t\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nxt}\sin t\,dt \overset{\mathbf{11.}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\,dt = G(x).$$

4 Exercice 4

1. Les choix des clients sont indépendants et chacun d'entre eux a la même probabilité p de choisir le produit A, donc comme X représente le nombre total de produits A qu'ils ont achetés : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(4,p)$ et $E(X) = 4p$. Pour la même raison : $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(4,1-p)$ et $E(Y) = 4(1-p)$.
Comme $X+Y=4$: $Z = \max\{X, 4-X\}$. La variable Z est donc à valeurs dans $\{2,3,4\}$ et :

$$P(Z=2) = P(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2,$$

$$P(Z=3) = P(X=1)+P(X=3) = \binom{4}{1}p(1-p)^3 + \binom{4}{3}p^3(1-p) = 4p(1-p)\big(2p^2-2p+1\big)$$

$$\text{et} \qquad P(Z=4) = P(X=0)+P(X=4) = \binom{4}{0}(1-p)^4 + \binom{4}{4}p^4 = p^4+(1-p)^4.$$

La variable aléatoire Z, finalement, représente le nombre de boîtes entamées par le commerçant en fin de journée.

2. Comme en **1.**, la loi de X sachant $\{N=n\}$ est la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

3. Le couple (X,N) est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ et pour tous $x,n \in \mathbb{N}$, sachant que $P(N=n) > 0$:

$$P(X=x \text{ et } N=n) = P_{\{N=n\}}(X=x)\;P(N=n) = \underbrace{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}_{=0 \text{ si } n<x} \times \frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$$

4. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x \text{ et } N=n) \overset{\mathbf{3.}}{=} \sum_{n=x}^{+\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\times\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^x}{x!}\,e^{-\lambda}\sum_{n=x}^{+\infty}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-x}}{(n-x)!}$$
$$\overset{k=n-x}{=} \frac{(\lambda p)^x}{x!}\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{k}}{k!} = \frac{(\lambda p)^x}{x!}\,e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^x}{x!}\,e^{-\lambda p}.$$

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$, donc : $E(X) = V(X) = \lambda p$.

5. La variable $Y = N-X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tous $a,b \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(N-X=b) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N-X=b \text{ et } N=n) = \sum_{n=b}^{+\infty} P(X=n-b \text{ et } N=n) \overset{\mathbf{3.}}{=} \sum_{n=b}^{+\infty}\binom{n}{n-b}p^{n-b}(1-p)^b\,\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$$
$$= \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^b}{b!}\,e^{-\lambda}\sum_{n=b}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^{n-b}}{(n-b)!} \overset{k=n-b}{=} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^b}{b!}\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!} = \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^b}{b!}\,e^{-\lambda}e^{\lambda p} = \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^b}{b!}\,e^{-\lambda(1-p)},$$

donc : $$P(X=a)\;P(N-X=b) \overset{\mathbf{4.}}{=} \frac{(\lambda p)^a}{a!}\times\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^b}{b!}\,e^{-\lambda(1-p)} = \binom{a+b}{a}p^a(1-p)^b\times\frac{\lambda^{a+b}}{(a+b)!}\,e^{-\lambda}$$
$$\overset{\mathbf{3.}}{=} P(X=a \text{ et } N=a+b) = P(X=a \text{ et } N-X=b).$$

6. $\operatorname{cov}(X,N) = \operatorname{cov}(X,X+Y) = \operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y) \overset{\mathbf{5.}}{=} \operatorname{cov}(X,X)+0 = V(X) \overset{\mathbf{4.}}{=} \lambda p.$

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z \leqslant k) = P(X \leqslant k \text{ et } Y \leqslant k) \overset{\textbf{5.}}{=} P(X \leqslant k)\, P(Y \leqslant k) = \mathrm{e}^{-\lambda p} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \times \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-\lambda} S(k, \lambda p) S\big(k, \lambda(1-p)\big).$$

8. (a) Code Python :

```
def S(k, x):
    res, u = 1, 1
    for j in range(1, k+1):
        u *= x/j
        res += u
    return res
```

(b) Le commerçant est en rupture de stock s'il est amené à vendre strictement plus de 5 produits A ou strictement plus de 5 produits B, autrement dit si $Z \geqslant 6$. Il s'agit donc de calculer : $P(Z \geqslant 6) = 1 - P(Z \leqslant 5)$.

Code Python :

```
p, a, k = 0.5, 10, 5

1-exp(-a)*S(k, a*p)*S(k, (1-p)*a)
```